

Análise da dinâmica de um pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical no suporte

Eduardo Lima de Oliveira*

Masayoshi Tsuchida,

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,

15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: edlima@webmail.ibilce.unesp.br, tsuchida@ibilce.unesp.br

Recentemente têm se observado um grande interesse no estudo da dinâmica não linear com dois graus de liberdade. O modelo apresentado neste trabalho consiste de uma massa suspensa por uma mola com coeficiente elástico não linear, presa em um suporte que oscila verticalmente com frequência e amplitude constantes e não afetadas pelo movimento do pêndulo (problema ideal). Neste trabalho, a análise do sistema é realizada investigando o comportamento dinâmico com a variação de alguns parâmetros do modelo matemático. Apresentamos as equações do movimento e a solução de equilíbrio do sistema. Resultados numéricos são apresentados, discutimos alguns resultados obtidos e expressamos as nossas conclusões. Técnicas numéricas usuais são utilizadas para analisar os comportamentos do sistema dinâmico.

Uma modelagem matemática e sugestões de simplificação do sistema dinâmico em questão podem ser encontradas no trabalho de Andrade e Peruzzi [1]. Zaki e colaboradores [12], estudam o efeito da força harmônica que excita um pêndulo elástico tangencialmente ao movimento da massa, bem como o efeito da não linearidade da mola. No trabalho de Souza Junior [9] é investigado o aspecto essencial do critério de estabilidade do movimento do navio, bem como o modelo matemático do movimento do navio em grandes amplitudes. No trabalho de Bishop e Xu [4] é estudada a dinâmica e controle de um sistema pendular excitado verticalmente.

Na figura (1) temos o esboço do modelo, onde $u = A\cos(\omega t)$, é a excitação externa com amplitude A e frequência ω ; m e θ são respectivamente a massa e o ângulo de oscilação do pêndulo; l o comprimento da mola em repouso; g a aceleração da gravidade terrestre; Z a deformação da mola; k e ε os coeficientes de elasticidade linear e não linear da mola respectivamente.

Equações Adimensionais

A modelagem matemática foi feita a partir do formalismo Lagrangeano, através das energias cinética e potencial [1][2]. Introduzindo as relações $\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t = \nu\tau$ e $Z = lz$, as equações adimensionais de

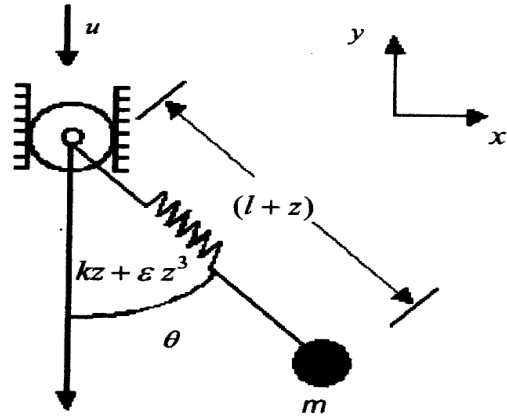


Figura 1: Pêndulo elástico com excitação paramétrica vertical

movimento se escrevem

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\dot{z}}{1+z} + \frac{\eta}{(1+z)^2} \right) \dot{\theta} + (\alpha \text{sen}(\Omega\tau) + 1) \frac{\text{sen}\theta}{1+z} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{z} + \psi \dot{z} - (1+z)\dot{\theta}^2 - (\alpha \text{sen}(\Omega\tau) + 1) \cos\theta + \kappa z + \lambda z^3 = 0 \quad (2)$$

onde $\alpha = \frac{Aw^2}{g}$, $\Omega = \omega\nu^{-1}$, $\eta = \frac{c_1}{ml^2}\nu^{-1}$, $\psi = \frac{c_2}{m}\nu^{-1}$, $\lambda = \varepsilon^2 l^2 \nu^{-2} = \frac{\varepsilon}{m} \frac{l^2}{\nu^2}$ e $\kappa = \omega_0^2 \nu^{-2}$, com $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$.

Ponto de Equilíbrio

Em termos das variáveis de estado $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta, \dot{\theta}, z, \dot{z})$, se considerarmos $\varepsilon > 0$ o ponto de equilíbrio do sistema dinâmico é $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$ e

$$x_4^* = \left\{ \left[\left(\frac{\kappa}{3\lambda} \right)^3 + \left(\frac{1}{2\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\lambda} \right\}^{\frac{1}{3}} - \left\{ \left[\left(\frac{\kappa}{3\lambda} \right)^3 + \left(\frac{1}{2\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\lambda} \right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Note que se considerarmos a mola linear, isto é, $\lambda = 0$, então teremos $x_3^* = \kappa^{-1}$. É natural observar que o ponto de equilíbrio depende dos coeficientes lineares e não lineares da mola. A solução x_3^* acima é um zero real do polinômio de terceiro grau em x^3 [5], e se supormos $\varepsilon < 0$, podemos obter três zeros reais desse polinômio [7].

Em geral, é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não lineares, e então,

*bolsista Capes

procuramos o comportamento em primeira aproximação na vizinhança dos pontos de equilíbrio. Tal procedimento é conhecido como linearização do sistema dinâmico [8]. Estudando a aproximação linear, pode-se, às vezes, prever o comportamento das soluções do sistema não linear que se iniciam na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Fazemos uma translação do sistema para colocar o ponto de equilíbrio na origem do sistema de coordenadas, e obtemos a matriz jacobiana J calculada no ponto de equilíbrio

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1+x_3^*} & -\frac{\eta}{(1+x_3^*)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\kappa - 3\lambda(x_3^*)^2 & -\psi \end{bmatrix}$$

Os autovalores dessa matriz são:

$$\Lambda_{1,2} = -\frac{\psi}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\psi^2 - 4[\kappa + 3\lambda(x_3^*)^2]}$$

$$\Lambda_{3,4} = -\frac{\eta}{2(1+x_3^*)^2} \pm \frac{\sqrt{\eta^2 - 4(1+x_3^*)^3}}{2(1+x_3^*)^2}$$

Quando $\psi^2 - 4[\kappa + 3\lambda(x_3^*)^2] < 0$ e $\eta^2 - 4(1+x_3^*)^3 < 0$ temos $\Lambda_{1,2} = -\frac{\psi}{2} \pm \omega_1 i$ e $\Lambda_{3,4} = -\frac{\eta}{2(1+x_3^*)^2} \pm \omega_2 i$, com ω_1 e ω_2 respectivamente as frequências da mola e do pêndulo. Observando os autovalores da jacobiana concluímos que existem valores dos parâmetros para os quais o ponto de equilíbrio passa de hiperbólico para não hiperbólico, assim como autovalores passam de reais para complexos.

Resultados Numéricos

Para realizar simulações numéricas consideramos a mola linear, isto é, $\lambda = 0$. A amplitude da força de excitação é considerada *muito grande* quando $\alpha > 1.0$. Na tabela abaixo exibimos os valores adotados para os parâmetros, de modo que as frequências ω_1 e ω_2 estejam aproximadamente em ressonâncias 2 : 1, 1 : 1 e 9 : 4. O propósito dessa última ressonância é analisar a dinâmica do sistema quando o mesmo está em uma ressonância interna de ordem elevada. Para valores de λ diferente de zero essas ressonâncias deixam de existir, a menos que tenhamos $\lambda \approx 0$. Ainda com respeito ao parâmetro não linear da mola, lembramos que para se ter uma mola macia é necessário que $\lambda = \frac{\epsilon}{m} \frac{l^2}{\nu^2} < 0$. Nesse caso podemos ter

$$\left(\frac{\kappa}{3\lambda}\right)^3 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 < 0$$

o que acarreta uma mudança na topologia do sistema, e outros pontos de equilíbrio aparecem [7].

As figuras 2(a) e 2(b) ilustram o movimento da mola no espaço de fases com o parâmetro de controle $\alpha = 0.3$ e 0.55 respectivamente. A velocidade do movimento (x_4) é maior quando α é maior, como podemos observar nos respectivos gráficos (2(a) e 2(b)), mas a amplitude não sofre grande alteração. Nas figuras 3(a) e 3(b) estão ilustradas as secções de Poincaré para o movimento angular, onde o fluxo atravessa a secção de Poincaré com um período de $\frac{2\pi}{\Omega}$. As figuras mostram o comportamento dinâmico de x_1 (posição angular), e quando α varia há uma duplicação do período angular. Para $\alpha = 0.4$, o sistema dinâmico sob as condições de

Ressonância	1	2	3
parâmetros:	$\omega_1 \approx 2\omega_2$	$\omega_1 \approx \omega_2$	$4\omega_1 \approx 9\omega_2$
$\lambda = \epsilon^2 l^2 \nu^{-2}$	0	0	0
$\kappa = \omega_0^2 \nu^{-2}$	3.00	1.618	4.00
$\psi = \frac{c_2}{m} \nu^{-1}$	0.04	2.000	0.02
$\eta = \frac{c_1}{ml^2} \nu^{-1}$	0.07	0.010	0.01
$\alpha = \frac{Aw^2}{g}$	-	-	-
$\Omega = \omega \nu^{-1}$	1.73	0.786	2.0
ω_1	1.7319	0.78613	2.0000
ω_2	0.8658	0.78614	0.8944

Tabela 1: Parâmetros do sistema. O sistema se encontra em ressonância interna 2:1 para os valores da coluna 1, 1:1 para coluna 2 e 9:4 para a coluna 3.

ressonância 2, apresenta um ciclo limite no movimento do pêndulo, conforme podemos notar nas figuras 4(a) e 4(b). Nas figuras 5(a) e 5(b) mostra-se os comportamentos do pêndulo e da mola respectivamente, correspondentes à ressonância 3 e $\alpha = 0.499$, nesse caso o sistema apresenta várias amplitudes de oscilação do ângulo e da mola.

Os sistemas pendulares são objetos clássicos de pesquisa [10] [11], pois podem ser usados em muitos sistemas físicos ou sistemas elétricos [4]. Este sistema (equações 1 e 2) parametricamente excitado, tem uma grande quantidade de fenômenos não lineares, por exemplo, temos a hipótese de que o número de voltas anti-horárias e horárias que o pêndulo realiza em um período de tempo, depende do estado caótico do sistema [4]. Para mostrar que o sistema se encontra em comportamento caótico pode-se usar o expoente característico de Lyapunov. Se $|dS|$ representa a medida da distância entre duas condições iniciais vizinhas e $|ds|$ a medida depois de um tempo t , o expoente de Lyapunov para uma orientação i é calculado por

$$\sigma(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{|ds|}{|dS|} \right) \right)$$

Se o expoente de Lyapunov é positivo, os fluxos divergem exponencialmente com o tempo, isto é, $|ds| = |dS| \exp(\sigma t)$ [6] [11]. Podemos observar na figura 7 o expoente característico de Lyapunov para o pêndulo, existe uma tendência para o movimento caótico no início, mas depois o movimento torna-se regular (figura a). É ilustrada na figura 7(b) o cálculo do expoente máximo para o caso ressonância 3 e expoente é positivo indicando o comportamento caótico. Na figura 8 encontram-se as secções de Poincaré no espaço de fases para o movimento da mola. Comparando com as curvas no espaço de fases das figuras 5(b) e 6(b), as secções de Poincaré também confirmam o movimento regular para $\alpha = 0.499$ (figura 8(a)), e movimento caótico para $\alpha = 0.33$ (figura 8(b)). Nas simulações somente foi encontrado regime caótico na ressonância 3 da tabela. Uma outra ferramenta para análise de um sistema dinâmico pode ser obtida acumulando-se arquivos as diversas secções de Poincaré [3], variando lentamente o parâmetro de controle. No caso do pêndulo elástico excitado verticalmente, a amplitude de excitação α pode ser usado como o parâmetro de controle.

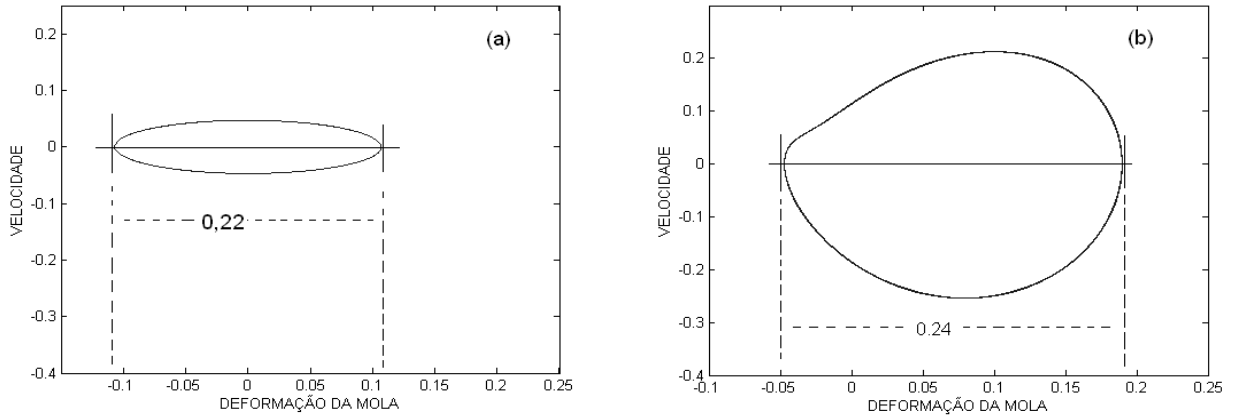


Figura 2: Ressonância 1 (ver tabela 1) . As figuras (a) e (b) ilustram as curvas no espaço de fases para mola, partindo de uma mesma condição inicial, sem a fase transitente e com valores $\alpha = 0.3$ e $\alpha = 0.55$ respectivamente.

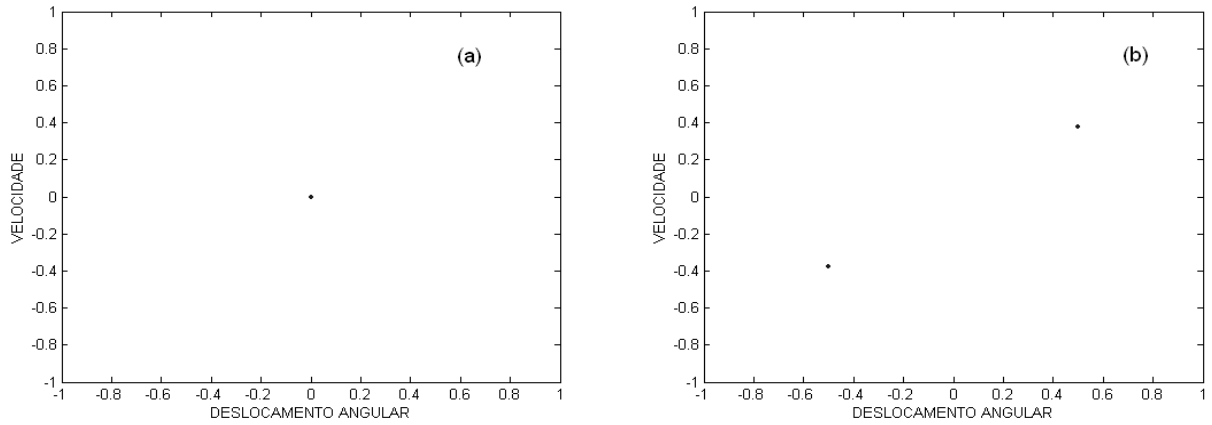


Figura 3: Ressonância 1 e $\alpha = 0.001$ (a) e $\alpha = 0.3$ (b). A figuras ilustram as secções de Poincaré para o movimento angular, para diferentes valores da amplitude α .

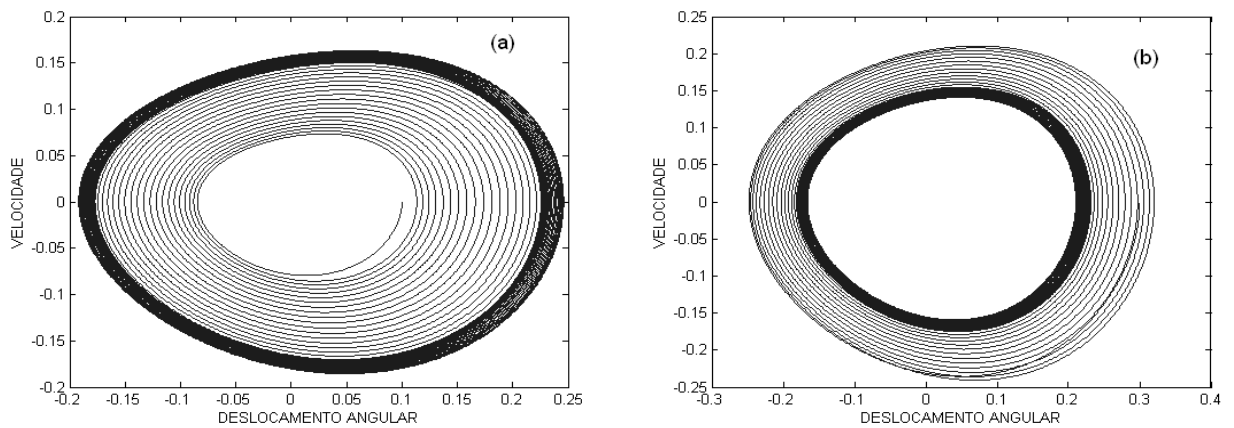


Figura 4: Ressonância 2 (coluna 3) e $\alpha = 0.4$. As figuras (a) e (b) ilustram curvas no espaço de fases que caracterizam um ciclo limite, pois em (a) temos a condição inicial $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e $x_1 = 0.1$, e em (b) a condição inicial é $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e $x_1 = 0.3$.

conclusão

Neste trabalho inicia-se uma breve análise da dinâmica de um pêndulo elástico excitado verticalmente. Ver-

ificamos um comportamento caótico para uma conformação particular do sistema, além de outros resultados numéricos para análise do comportamento dinâmico. Os autovalores foram calculados explicita-

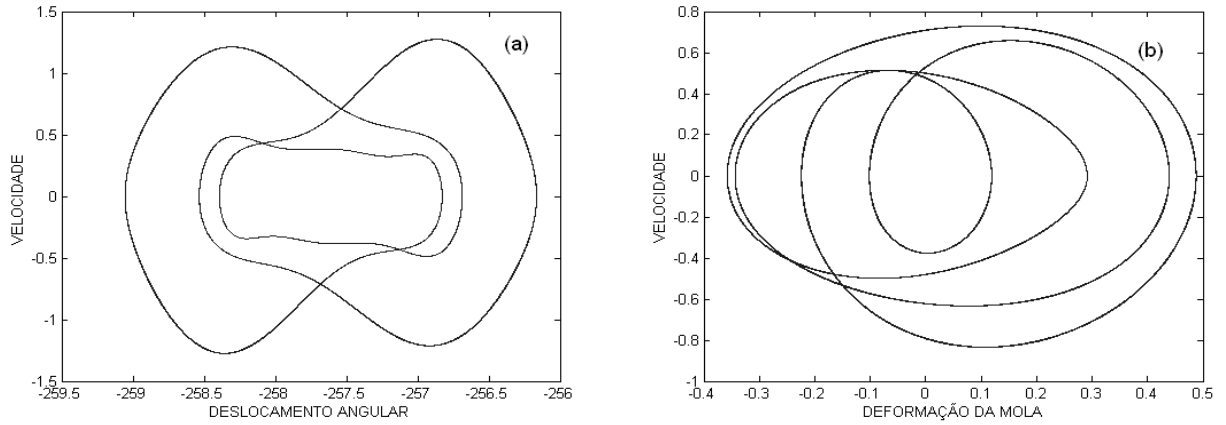


Figura 5: Ressonância 3 e $\alpha = 0.499$. As figuras ilustram as curvas no espaço de fases, sem a fase transitente, para o deslocamento angular e a oscilação da mola respectivamente.

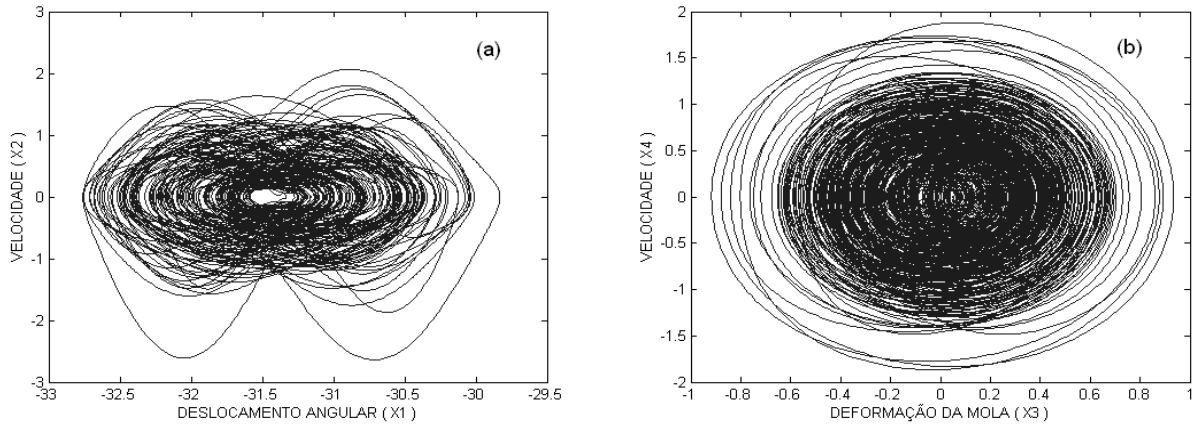


Figura 6: ressonância 3 e $\alpha = 0.33$. As figuras (a) ilustra o comportamento da solução angular no espaço de fases e (b) o movimento da mola no espaço de fases. Ambos os movimentos são caóticos.

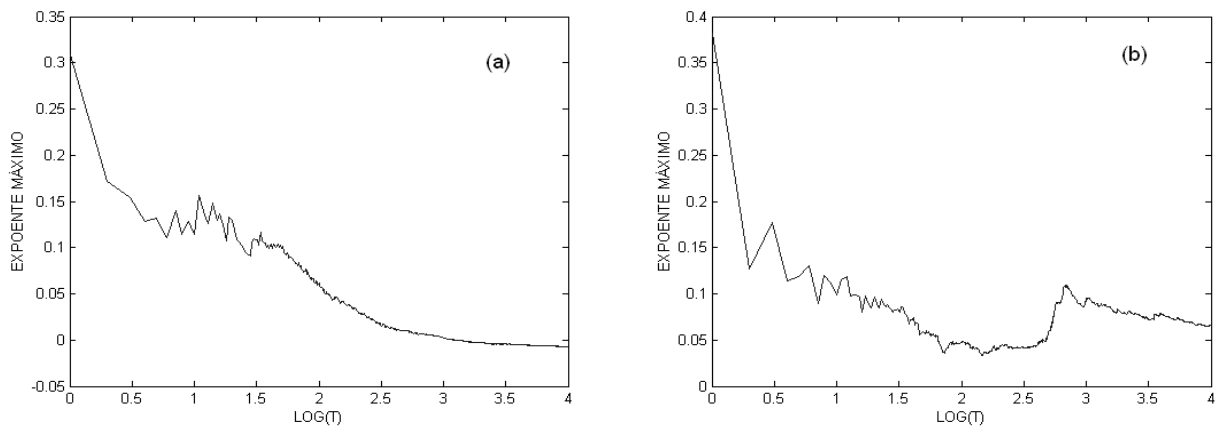


Figura 7: Expoente característico de Lyapunov. A figura (a) está sob o regime de ressonância 2 e $\alpha = 0.4$ (estável), e a figura (b) sob o regime 3 com $\alpha = 0.33$ (caótico).

mente em função dos parâmetros, e constatamos que eles podem assumir valores reais ou complexos, dependendo dos valores dos parâmetros do sistema dinâmico. Neste estudo preliminar foi encontrado um movimento

caótico (ressonância de alta ordem 9:4), e também foi possível prever as diversas explorações que o sistema oferece. Em trabalhos futuros sobre este sistema pode-se considerar uma força periódica tangente à massa para

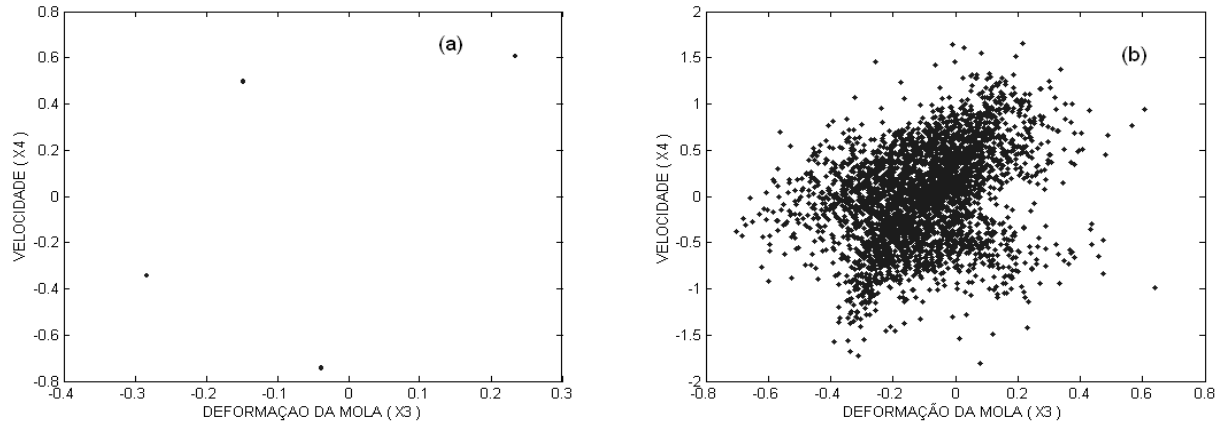


Figura 8: As figuras ilustram a secção de Poincaré para ressonância 3 com $\alpha = 0.499$ e $\alpha = 0.33$ respectivamente. Compare (a) e (b) com as figuras 5(b) e 6(b).

estimular a oscilação angular do pêndulo.

Referências

- [1] V. S. ANDRADE, N. J. PERUZZI, "Modelagem de um sistema dinâmico tipo pendular", Série Arquimedes, Volume 2, Anais do Dincon 2003.
- [2] V. S. ANDRADE, "Análise dinâmica caótica de pêndulos com excitação paramétrica no suporte", Universidade de São Paulo, dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos 2003.
- [3] J.M. BALTHAZAR, "Comportamento de sistemas mecânicos não lineares e caóticos", Curso de Verão, Pós-graduação em matemática Aplicada, IBiLCE/UNESP/SJRP, 2004.
- [4] S. R. BISHOP and D XU, "Stabilizing the parametrically excited pendulum onto high order periodic orbits", Journal of sound and vibration (1996) 194(2), 287-293.
- [5] C. B. BOYER, "história da matemática", Editora Edgard Blücher Ltda, 2ª edição, trad. Elza E. Gomide, São Paulo 1996, pág 195-196.
- [6] T. DAUXOIS, H. QAUSMI and BARRÉ, "Links between nonlinear dynamics and statistical mechanics in a simple one-dimensional model", 69364 Lyon Cédex 07, France, 2004.
- [7] H. MINEUR, "Techniques de calcul numérique", Librairie Polytechnique Béranger, DUNOD, Paris, 1966
- [8] L. H. A. MONTEIRO, "Sistemas Dinâmicos", Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002, pg 34-67 56-70.
- [9] J. D'A. R. de SOUZA JUNIOR, "Geometrical methods of nonlinear dynamics in ship capsizing", PhD thesis, London, 1995.
- [10] J. D'A. R. de SOUZA JUNIOR, "An Investigation into Mechanisms of Loss of Safe Basis in a 2 D.O.F. Nonlinear Oscillator", Journal of Brazilian Society of Mechanical Sciences, vol.24 no.2 may 2002.
- [11] J. D'A. R. de SOUZA JUNIOR and S. R. BISHOP, "Boundaries of safe operation of mechanical oscillators", Appl. Math. Modelling 1997, vol.21 February.
- [12] K. ZAKI, S. NOAH, K. RAJAGOPAL and A. R. SRINIVASA, "Effect of Nonlinear Stiffness on the Motion of a Flexible Pendulum", Texas A & M University, College Station, Tx 77843, U.S.A.