

# Zeros dos Polinômios de Szegő em Análise de Freqüência

Cleonice Fátima Bracciali, Fernando Feltrin Milani\*

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,

15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: cleonice@ibilce.unesp.br, fmilani@ibilce.unesp.br

## 1 Polinômios de Szegő

Seja  $\psi$  uma medida positiva no círculo unitário  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , ou seja,  $\psi(e^{i\theta})$ , definida em  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , é uma função real, limitada e não decrescente com infinitos pontos de aumento. Suponhamos que os momentos

$$\mu_m = \int_C z^{-m} d\psi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\psi(\theta), \quad m = 0, 1, \dots,$$

existam.

Considere o produto interno definido em  $L_2(\psi)$  dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_C f(z) \overline{g(z)} d\psi(z).$$

A seqüência de polinômios mônicos,  $\{\rho_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ , que satisfaz

$$\langle \rho_n, \rho_m \rangle = \int_C \rho_n(z) \overline{\rho_m(z)} d\psi(z) = 0, \quad n \neq m,$$

onde  $\rho_n$  tem grau  $n$ , é conhecida como seqüência de polinômios de Szegő com relação à  $\psi$ , (veja [8] e [9]).

Os polinômios,  $\rho_n(z)$ , e seus recíprocos,  $\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho_n(1/z)}$ , são dados por

$$(1) \quad \rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}$$

e

$$\rho_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_{-1} \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

de onde podemos obter

$$\langle \rho_n(z), z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

e

$$\langle \rho_n^*(z), z^m \rangle = \begin{cases} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

O determinante  $\Delta_n$  é chamado determinante de Toeplitz e satisfaz

$$\Delta_n > 0, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Os polinômios de Szegő satisfazem o sistema de relação de recorrências

$$\begin{aligned} \rho_n^*(z) &= \bar{\delta}_n z \rho_{n-1}(z) + \rho_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \\ \rho_n(z) &= \delta_n \rho_n^*(z) + (1 - |\delta_n|^2) z \rho_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

com as condições iniciais

$$\rho_0(z) = 1, \quad \rho_0^*(z) = 1.$$

É conhecido (veja[9]) que os zeros dos polinômios de Szegő estão no interior do círculo unitário.

## 2 Análise de freqüência

Seja um sinal em tempo discreto dado por

$$x_N(m) = \begin{cases} \sum_{j=-I}^I \alpha_j e^{iw_j m}, & m = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, & m < 0 \text{ ou } m \geq N. \end{cases}$$

O problema de análise de freqüência consiste em determinar as freqüências  $w_j$  para  $N$  dados observados em instantes de tempo igualmente espaçados,

$$t_m = m\Delta t, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad \Delta t > 0.$$

Os números  $\alpha_j$  representam as amplitudes, com

$$\alpha_0 \geq 0, \quad 0 \neq \alpha_j = \bar{\alpha}_{-j} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, I,$$

os números reais  $w_j$  denotam as freqüências, onde

$$0 = w_0 < w_1 < \dots < w_I < \pi,$$

$$w_j = -w_{-j}, \quad j = 1, \dots, I.$$

Os pontos  $e^{iw_j}$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$ , são conhecidos como pontos de freqüência. A quantidade de pontos de freqüência será denotada por

$$n_0 = 2I + r < N, \quad \text{onde } r = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha_0 > 0 \\ 0, & \text{se } \alpha_0 = 0 \end{cases},$$

\*bolsista de Mestrado CNPq

### 3 Zeros dos polinômios de Szegő em análise de frequência

Definimos a medida  $\psi_N$  em  $[-\pi, \pi]$  por

$$d\psi_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) e^{-ik\theta} \right|^2 d\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad \in \mathbb{N}.$$

Com relação à medida  $\psi_N$ , temos o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\psi_N} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\psi_N(\theta), \quad f, g \in \Lambda,$$

os polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N, z)$  e os momentos ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

$$(2) \quad \mu_m^{(N)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_N(k) x_N(k+m), & m \geq 0, \\ \mu_{-m}^{(N)}, & m \leq -1. \end{cases}$$

Definimos, agora, uma medida discreta por

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi < \theta < w_{-I}, \\ \sum_{j=-I}^{-I+k} |\alpha_j|^2, & w_{-I+k} \leq \theta \leq w_{-I+k+1}, \\ \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2, & w_I \leq \theta < \pi, \end{cases}$$

$0 \leq k \leq 2I - 1$ , com momentos

$$\mu_m = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\psi(\theta) = \sum_{j=-I}^I |\alpha_j|^2 e^{-imw_j}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

e com os polinômios de Szegő  $\rho_n(z)$  associados a ela.

A seguir apresentaremos uma técnica para encontrar as frequências  $w_j$  baseada na convergência dos zeros dos polinômios de Szegő  $\rho_n(\psi_N, z)$  quando  $N \rightarrow \infty$ , esta técnica é chamada N-processo. Em [2] encontramos que

$$\rho_{n_0}(z) = (z-1)^L \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}).$$

Foi provado em [4], Lema 2.1, que

$$\frac{1}{N} \mu_m^{(N)} = \mu_m + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \text{com } N \rightarrow \infty,$$

para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Com isto é possível mostrar (veja [4], Lema 3.2) que, para cada  $n = 0, 1, \dots, n_0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_N, z) = \rho_n(z),$$

com convergência localmente uniforme em  $\mathbb{C}$ . Em particular,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{n_0}(\psi_N, z) = (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}),$$

de onde vemos que os zeros  $z(j, n_0, N)$  de  $\rho_{n_0}(\psi_N, z)$  podem ser ordenados apropriadamente, tal que,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z(j, n_0, N) = e^{iw_j}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I.$$

Se  $r \neq 0$  (isto é,  $\alpha_0 > 0$ ), então  $\lim_{N \rightarrow \infty} z(0, n_0, N) = 1 = e^{i0}$ .

A utilidade desta convergência é apenas teórica, pois, a quantidade de pontos de frequência  $n_0$  é desconhecida. Isto é, não sabemos qual o grau do polinômio de Szegő associado a  $\psi_N$  que devemos tomar para obter as frequências  $w_j$ . É necessário, então, investigar a convergência para polinômios de grau  $n$  suficientemente grande ( $n \geq n_0$ ). Antes, vamos considerar um exemplo, dado em [7] por Pan e Saff, onde vemos que, para  $n > n_0$ , a seqüência  $\{\rho_n(\psi_N, z)\}_{N=1}^{\infty}$  pode não ser convergente.

**Exemplo 3.1.** Consideremos um sinal da forma

$$x_N(m) = e^{-im\pi/4} + e^{im\pi/4} = 2 \cos(m\pi/4),$$

onde as únicas frequências são  $w_{-1} = -\pi/4$  e  $w_1 = \pi/4$  e, as amplitudes são  $\alpha_{-1} = \alpha_1 = 1$ .

Vemos que  $n_0 = 2$  e

$$\rho_2(z) = Q_5(z) = (z - e^{-i\pi/4})(z - e^{i\pi/4}) = z^2 - \sqrt{2}z + 1.$$

Vamos tomar duas subseqüências de  $\{N\}$  e calcular os respectivos momentos,

(a) Com  $N \equiv 0 \pmod{4}$ , temos

$$\begin{aligned} \mu_0^{(N)} &= 2N, & \mu_1^{(N)} &= \sqrt{2}(N-2), \\ \mu_2^{(N)} &= -2, & \mu_3^{(N)} &= -\sqrt{2}(N-2). \end{aligned}$$

(b) Com  $N \equiv 2 \pmod{4}$ , temos

$$\begin{aligned} \mu_0^{(N)} &= 2N + 2, & \mu_1^{(N)} &= \sqrt{2}N, \\ \mu_2^{(N)} &= 0, & \mu_3^{(N)} &= -\sqrt{2}(N-2). \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_3(\psi_{4k}, z) = \rho_2(z) \left( z + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_3(\psi_{4k+2}, z) = \rho_2(z) \left( z + \frac{\sqrt{2}}{4} \right),$$

ou seja, o limite de  $\{\rho_3(\psi_N, z)\}$ , com  $N \rightarrow \infty$ , não é único. Os momentos podem ser calculados através de (2) e o polinômio  $\rho_3(\psi_N, z)$  através de (1). Devemos notar que, embora não sejam iguais, os limites encontrados são da forma  $\rho_2(z)U_1(z)$  onde  $U_1$  é um

polinômio com zero em  $|z| < 1$ . Veremos adiante que isso não é uma mera coincidência.

Em [4] (Lema 3.3 e Teorema 3.1) e em [7] (Teorema 2.4) foi mostrado que se  $\{N_k\}_{k=1}^\infty$  é uma seqüência arbitrária de números naturais, então existe uma subseqüência  $\{N_{k_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$  de  $\{N_k\}$  tal que, para todo  $m = 1, 2, 3, \dots$  e todo  $z \in \mathbb{C}$ , existe uma seqüência de polinômios  $\{U_m(z)\}_{m=1}^\infty$ , dependendo de  $\{N_{k_\nu}\}$ , com todos os zeros no disco  $|z| < 1$ , tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_n(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = U_m(z) \rho_{n_0}(z), \quad l = 0, 1,$$

com convergência localmente uniforme em  $\mathbb{C}$ . Além disso,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_{n_0+m}(\psi_{N_{k_\nu}}, z) = U_m^{(1)}(z) (z-1)^r \prod_{j=1}^I (z - e^{iw_j})(z - e^{-iw_j}),$$

e, para cada  $n \geq n_0$  e  $\nu \geq 1$ , existem zeros  $z(j, n, N_{k_\nu})$  de  $\rho_n(\psi_{N_{k_\nu}}, z)$  tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} z(j, n, N_{k_\nu}) = e^{iw_j}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I.$$

Se  $r \neq 0$ , então  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z(0, n, N_{k_\nu}) = 1 = e^{i0}$ .

Como é possível ter mais zeros do que pontos de freqüência, Jones e Petersen [2] (Teorema 3.7), mostraram que os zeros  $z(j, n, N)$  de  $\rho_n(\psi_N, z)$  que não convergem para os pontos de freqüência satisfazem

$$|z(j, n, N)| \leq K_n < 1.$$

Outras técnicas de aproximação das freqüências  $w_j$  utilizam polinômios ortogonais na reta real (ver [1]).

Este trabalho trata-se de comparações entre o N-processo, modificações dele encontradas na literatura, por exemplo em [5] e [6], e as técnicas de aproximação das freqüências  $w_j$  dadas em [1].

## Referências

- [1] C.F. Bracciali, X. Li, A. Sri Ranga, Real orthogonal polynomials in frequency analysis, *Mathematics of Computation*, 74 (2005) 341-362.
- [2] W.B. Jones, V. Petersen, Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analysis and related topics, *Acta Applicandae Mathematicae*, 61 (2000) 149-174.
- [3] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21 (1989) 113-152.

- [4] W.B. Jones, W.J. Thron, O. Njåstad, H. Waadeland, Szegő polynomials applied to frequency analysis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 46 (1993) 217-228.
- [5] W.B. Jones, O. Njåstad, H. Waadeland, An alternative way of using Szegő polynomials in frequency analysis, In S.C. Cooper and W.J. Thron (eds), *Continued Fractions and Orthogonal Functions*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994, pp. 141-152.
- [6] V. Petersen, A combination of two methods in frequency analysis: The R(N)-process, In: W.B. Jones and Sri Ranga (eds), *Orthogonal Functions, Moment Theory and Continued Fractions: Theory and Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 199, Marcel Dekker, New York, 1992 pp. 387-398.
- [7] K. Pan, E.B. Saff, Asymptotics for zeros of Szegő polynomials associated with trigonometric polynomials, *Journal of Approximation Theory*, 7 (1992) 239-251.
- [8] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Providence, 1975.
- [9] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and the real line, in Field Institute Communications 14, *Special Functions, q-series and related topics* (M.E.H. Ismail et al., eds) pp. 211-245, American Mathematical Society, 1997.