Sobre Equações de Klein-Gordon com não Linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier

Marivaldo P. Matos, **Gesson José Mendes Lima,**

Faculdade de Estudos Avançados do Pará

66613-390, Belém do Pará,

E-mail: mgdmatos@terra.com.br, gessonmendes@yahoo.com.br,

Jorge Ferreira

UFPA - Campus-Guamá

Rua Augusto Corrêa, 01

66075110, Belém, PA

E-mail: jf@ufpa.br

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é analisarmos a existência local e unicidade de solução fraca para o problema de Cauchy abstrato, o qual denotaremos por (P):

$$(P)\left|\begin{array}{l} u\text{"} + M(\|u(t)\|^2)Au + M_1(|u(t)|^2)u = f \\ u(t) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{array}\right.$$

Onde V e H são espaços de Hilbert com produto interno e norma representados respectivamente por $((.))$, $\|.\|$ e $(,)$, $|.|$, V denso em H, com injeção compacta, as funções M, M_1 são de classe $C^1(0,\infty)$, $M(\lambda) > 0$ e $M_1(\lambda) \geq 0$; $\forall \lambda \geq 0$. O operador A definido pela terna $V, H; ((,))$ nas condições da Teoria Espectral. Ainda com relação ao problema (P), os dados iniciais u_0, u_1 e f são considerados de modo que $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in V$ e $f \in L^2(0,T;H)$.

2 Hipóteses

Seja $0 \leq t \leq T_0$, $T_0 > 0$ fixado. E as seguintes hipóteses sobre as funções M, M_1:

$$\begin{array}{l} a)\ M, M_1 \in C^1(0,\infty;\Re) \\ b)\ M(s) \geq m_0 > 0, \forall s \geq 0 \\ c)\ M_1(s) \geq m_1 \geq 0, \forall s \geq 0. \end{array}$$

Temos o seguinte resultado.

3 Resultado Principal

Teorema 01
Suponhamos que $D(A)$ com imersão compacta em V e que as funções M e M_1 satisfazem as condições estabelecidas acima. Dados $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in V$ e $f \in L^2(0,\infty;H)$, existe uma única função vetorial $u : [0,T_0] \to H$ tal que:

$$\begin{array}{l} 1) u \in L^\infty\left(0,T_0;D(A)\right), \\ 2) u' \in L^\infty\left(0,T_0;V\right), \\ 3) u\text{"} \in L^2(0,T_0;H), \\ 4) \frac{d}{dt}(u'(t),v) + M(\|u(t)\|^2)((u(t),v)) + \\ +M_1|u(t)|^2)(u(t),v) = (f(t),v), \forall v \in V, \\ \textit{no sentido } D'(0,T_0), \\ 5) u(t) = u_0 \textit{ e } u'(0) = u_1, \\ \textit{onde } M, M_1 \in C^1([0,\infty]); \textit{com } M(\lambda) > 0 \\ \textit{e } M_1(\lambda) \geq 0; \forall \lambda \geq 0. \end{array}$$

Demonstração:
O método utilizado para demonstrar a existência de solução será o método de Faedo-Galerkim que nos dará uma seqüência de soluções aproximadas do nosso problema. Em seguida, mostraremos que a seqüência em questão convergirá para solução do problema numa topologia conveniente e isto será demonstrado através das estimativas a priori.

4 1ª Etapa: Soluções Aproximadas

Sejam $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo de H constituído de vetores próprios do operador A e

$$\{\lambda_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

a correspondente seqüência de valores próprios.

Seja

$$V_m = [w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m]$$

o subespaço gerado pelos vetores $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$.

Devemos encontrar uma solução

$$u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m,$$

onde os $g_{\nu m}$ são de classe C^2, para o problema aproximado:

$$\begin{aligned}&(u"_m(t), w_j) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), w_j) +\\&M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), w_j)\\= \;&(f(t), w_j)\end{aligned} \tag{1}$$

$$u_{0m} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{\nu m}(t) w_\nu \longrightarrow u_0 \;\text{ em }\; D(A) \tag{2}$$

e

$$u_{1m} = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{\nu m}(t) w_\nu \longrightarrow u_1 \;\text{ em }\; V. \tag{3}$$

Colocamos o problema aproximado 1 nas condições de existência Carathéodory. Para isso, usamos um sistema equivalente. Feitos os devidos cálculo, obtemos solução $u_m(t)$ em $[0, t_m)$, $t_m \prec T$. As estimativas a priori, obtidas na próxima etapa, nos permitirão prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$.

2ª Etapa: Estimativas a Priori

Como a equação aproximada em (1) é válida para todo w_j, $j = 1, 2, ..., m$, segue por linearidade que ela é valida em todo V_m, isto é,

$$\begin{aligned}(u''_m(t), v) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v) +\\ M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), v) = (f(t), v).\end{aligned} \tag{4}$$

para todo $v \in V_m$.

Estimativas a Priori I

Tomando $v = u'_m(t)$, na equação aproximada (4) obtemos

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)((u_m(t), u'_m(t)))\\ +M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)).\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left|u'_m(t)\right|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2\\ +M_1(|u_m(t)|^2)\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|u_m(t)|^2 = (f(t), u'_m(t).\end{aligned}$$

Depois de alguns cálculos, obtemos os seguintes resultados:

(u_m) é limitada em $L^\infty(0, T; V)$

e

$\left(u'_m\right)$ é limitada em $L^\infty(0, T; H)$.

Estimativas a Priori II

Tomando $v = Au'_m(t)$, na equação aproximada (4) obtemos

$$\begin{aligned}(u''_m(t), Au'_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)((u_m(t), Au'_m(t)))\\ +M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), Au'_m(t)) = (f(t), Au'_m(t)).\end{aligned} \tag{5}$$

temos que:

$$\begin{aligned}(u''_m(t), Au'_m(t)) &= \left((u''_m(t), u'_m(t))\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u'_m(t)\right\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left((u_m(t), Au'_m(t))\right) &= (Au_m(t), Au'_m(t))\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u_m(t), Au'_m(t)) &= (u_m(t), u'_m(t))\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2.\end{aligned}$$

Utilizando algumas convergências, imersões, desigualdades temos:

$\left(u'_m\right)$ é limitada em $L^\infty(0, T_0; V)$

e

(u_m) é limitada em $L^\infty(0, T_0; D(A))$.

Estimativas a Priori III

Tomando $v = u''_m(t)$ na equação aproximada (1), obtemos

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u''_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u''_m(t))\\ +M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), u''_m(t)) = (f(t), u''_m(t))\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}2\left|u''_m(t)\right|^2 + 2M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u''_m(t))\\ +2M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), u''_m(t)) = 2(f(t), u''_m(t))\end{aligned}$$

Usando limitações, desigualdades e fazendo os devidos cálculos, segue o resultado:

$\left(u''_m\right)$ é limitada em $L^2(0, T_0; H)$.

3ª Etapa: Passagem ao Limite

Das estimtivas anteriores concluimos que

(u_m) é limitada em $L^\infty(0, T_0; D(A))$

$\left(u'_m\right)$ é limitada em $L^\infty(0, T_0; V)$

$\left(u''_m\right)$ é limitada em $L^2(0, T_0; H)$

Agora utilizaremos o teorema de *Banach-Alouglu-Borbaki*, pois os espaços onde as sequências são limitadas são na pior das hipóteses espaços de Banach, dessa forma, podemos extrair uma subsequência de (u_m), que continuaremos a denotar por (u_m) tal que:

$$u_m \longrightarrow u \; em \; L^\infty(0, T_0; D(A)), fraco-\bigstar \tag{6}$$

$$u'_m \longrightarrow u' \; em \; L^\infty(0, T_0; V), fraco-\bigstar \tag{7}$$

$$u''_m \longrightarrow u'' \; em\%L^2(0, T_0; H), fraco \tag{8}$$

Usando o fato que
$L^{\infty}(0,T;X)$ é imerso em $L^2(0,T;X)$

segue de (6) que

$$u_m \longrightarrow u \ em \ L^2(0,T_0;D(A)), fraco$$

isto é,

$$(Au_m,w) \longrightarrow (Au,w), \forall w \in L^2\ (0,T_0;H) \quad (9)$$

Da convergência 8 deduzimos que

$$(u_m^{''},w) \longrightarrow (u^{''},w), \forall w \in L^2\ (0,T_0;H) \quad (10)$$

Convergência dos termos não lineares

Por (6) e (7), segue que (u_m) é limitada em $L^2(0,T_0;D(A))$ e $(u_m^{'})$ é limitada em $L^2(0,T_0;V)$ de modo que usando o *lema de Compacidade de Aubin-Lions*, com $B_0 = D(A)$, $B = B_1 = V$, podemos extrair novamente uma subsequência de (u_m) , que continuamos denotando por (u_m) , tal que

$$u_m \longrightarrow u, \ em \ L^2(0,T_0;V)$$

e portanto,

$$\|u_m\| \longrightarrow \|u\|, \ em \ L^2(0,T_0)$$

e passando a uma subsequência de (u_m), se necessário, podemos supor que

$$\|u_m(t)\|^2 \longrightarrow \|u(t)\|^2, \ q.s. \ em \ [0,T_0]$$

e sendo M contínua, obtemos

$$M(\|u_m(t)\|^2) \longrightarrow M(\|u(t)\|^2), \ q.s. \ em \ [0,T_0] \quad (11)$$

Usando (9) e (11) concluimos a convergência de um termo não linear, isto é,

$$M(\|u_m(t)\|^2)((u_m(t),v)) \longrightarrow M(\|u(t)\|^2)((u(t),v)) \quad em \ L^2(0,T_0;V) \quad (12)$$

Para concluir a convergência do outro termo não linear, basta notar que $V \hookrightarrow H$, assim,

$$M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t),v) \longrightarrow M_1(t)(|u(t)|^2)(u(t),v) \quad em \ L^2(0,T_0;H) \quad (13)$$

Para passagem ao limite, tomemos $\xi = \theta.v$, onde $\theta(t) \in L^2(0,T_0)$ e $v \in V_{m_0}$, m_0 fixo. Agora integrando a equação aproximada (4) de 0 até T_0, obtemos:

$$\begin{array}{l} \int_0^{T_0}(u_m^{''}(t),v)\theta(t)\,dt+ \\ +\int_0^{T_0} M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t),v)\theta(t)\,dt+ \\ +\int_0^{T_0} M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t),v)\theta(t)\,dt \\ =\int_0^{T_0}(f(t),v)\theta(t)\,dt. \end{array} \quad (14)$$

Tomando o limite em (14), com $m \to \infty$, e usando (10), (12) e (13), obteremos

$$\begin{array}{l} \int_0^{T_0}(u^{''}(t),v)\theta(t)\,dt+ \\ +\int_0^{T_0} M(\|u(t)\|^2)(Au(t),v)\theta(t)\,dt+ \\ +\int_0^{T_0} M_1(|u(t)|^2)(u(t),v)\theta(t)\,dt \\ =\int_0^{T_0}(f(t),v)\theta(t)\,dt. \end{array}$$

$\forall \theta \in L^2(0,T_0)$ e $v \in V_{m_0}$. Como V_{m_0} é denso em H, a última igualdade acima é valida $\forall \theta \in L^2(0,T_0)$ e $v \in H$.

5 $4^{\underline{a}}$ Etapa:Condições Iniciais

Observemos inicialmente que faz sentido calcular $u(0)$ e $u^{'}(0)$, pois temos de resultados anteriores que $u \in L^2(0,T_0;D(A))$, $u^{'} \in L^2(0,T_0;V)$ e $u^{''} \in L^2(0,T;H)$ e usando resultados de regularidade, concluimos que

$$u \in C^0([0,T_0];V)$$

e

$$u^{'} \in C^0([0,T_0];H)$$

Consideremos $\theta \in C^1([0,T_0])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T_0) = 0$ e $v \in V$, como, $u_m^{'} \longrightarrow u^{'}$ em $L^2(0,T_0;V)$, segue que

$$((u_m^{'}(t),w)) \longrightarrow ((u^{'}(t),w)) \forall w \in L^2(0,T_0;V)$$

Tomando $w(t) = \theta(t)v$, com $\theta(t) \in L^2(0,T_0)$ e $v \in V$, temos que

$$\int_0^{T_0}((u_m^{'}(t),v))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^{T_0}((u^{'}(t),v))\theta(t)dt$$

isto é,

$$\int_0^{T_0}\frac{d}{dt}((u_m(t),v))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^{T_0}\frac{d}{dt}((u(t),v))\theta(t)dt \quad (15)$$

usando integração por partes em ambas as integrais em (15) resulta:

$$\left| \begin{array}{l} -((u_m(0),v)) - \int_0^{T_0}((u_m(t),v))\theta^{'}(t)dt \to \\ \longrightarrow -((u(0),v)) - \int_0^{T_0}((u(t),v))\theta^{'}(t)dt \end{array} \right.$$

de (6), temos:

$$\int_0^{T_0}((u_m(t),v))\varphi dt \longrightarrow \int_0^{T_0}((u(t),v))\varphi dt;$$

$$\forall v \in V; \forall \varphi \in L^1(0,T_0)$$

Assim, concluí-se que

$$((u_m(0),v)) \longrightarrow ((u(0),v)). \quad (16)$$

Mas,

$$u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 em D(A) \hookrightarrow V$$

então,

$$((u_m(0),v)) \longrightarrow ((u_0,v)) \forall v \in V \quad (17)$$

De (16) e (17) obtemos

$$((u(0), v)) = ((u_0, v)), \forall v \in V$$

Por densidade, $u(0) = u_0$.

Para provarmos que $u^{'}(0) = u_1$ usamos as convergências (3) e (7) e procedemos de forma análoga, donde concluímos

$$((u^{'}(0), v)) = ((u_1, v)), \forall v \in H$$

Logo $u^{'}(0) = u_1$. Dessa maneira fica concluida a demonstração do teorema 1.

6 5ª ETAPA: UNICIDADE

Sejam u e v funções vetorias definidas de $[0, T]$ em H tais que sejam soluções do nosso problema nas condições do *teorema 1 e considere* $w(t) = u(t) - v(t)$. Então,

$$w \in L^{\infty}(0, T_0; D(A)) \tag{18}$$

$$w^{'} \in L^{\infty}(0, T_0; V) \tag{19}$$

$$w^{''} \in L^{2}(0, T_0; H) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} & w^{''} + M\left(\|u\|^2\right) Au - M\left(\|v\|^2\right) Av \\ & + M_1\left(|u|^2\right) u - M_1\left(|v|^2\right) v \\ & = 0 \ em\ L^2(0, T; H) \end{aligned} \tag{21}$$

$$w(0) = 0 \ e\ w^{'}(0) = 0 \tag{22}$$

Mas note que de (21) implica

$$\begin{aligned} & w" + M\left(\|u\|^2\right) Aw + M_1\left(|u|^2\right) w + \\ & + \left[M\left(\|u\|^2\right) - M\left(\|v\|^2\right)\right] Av \\ & + \left[M_1\left(|u|^2\right) - M_1\left(|v|^2\right)\right] v \\ & = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

usando o produto interno de H em (23) com $w^{'}(t)$, teremos

$$\begin{aligned} & \left(w"(t), w^{'}(t)\right) + M\left(\|u(t)\|^2\right)\left(\left(w(t), w^{'}(t)\right)\right) \\ & + M_1\left(|u(t)|^2\right)\left(w(t), w^{'}(t)\right) \\ & + \left[M\left(\|u(t)\|^2\right) - M\left(\|v(t)\|^2\right)\right]\left(Av(t), w^{'}(t)\right) \\ & + \left[M_1\left(|u(t)|^2\right) - M_1\left(|v(t)|^2\right)\right]\left(v(t), w^{'}(t)\right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Agora fazendo os devidos cálculos, obteremos:

$$\left|w^{'}(t)\right| + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 \leq c_9 \int_0^t \begin{bmatrix} \|w(s)\|^2 \\ + |w(s)|^2 \\ + \left|w^{'}(s)\right|^2 \end{bmatrix} ds,$$

e usando lema de Gronwall, concluímos que

$$\left|w^{'}(t)\right| + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 = 0 \Longrightarrow |w(t)| = 0.$$

Portanto,

$$u(t) = v(t), t \in [0, T_0]$$

Referências

[1] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[2] CARRIER, G.F. *On the vibration problem of elastic string.* Q.J. Appl. Math 3,pp151-165, 1945.

[3] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.

[4] MATOS, M.P., FEREIRA, J., SANTOS, M. L. and PEREIRA, D.C. *Hidden Regularity for the Hiperbolc-Parabolic Equations.* (To Appear).

[5] MEDEIROS L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Texto de Métodos Matemáticos. no. 25, IM-UFRJ, 1993.