

Condições LMI do Teorema do Pequeno Ganho Escalonado para Análise de Estabilidade de Sistemas com Atraso

Giörgio Valmórbida,

Pedro Luis Dias Peres

Depto de Telemática, FEEC, UNICAMP,

Av. Albert Einstein 400, CP 6101, 13083-970, Campinas SP

E-mail: giorgio@dt.fee.unicamp.br, peres@dt.fee.unicamp.br

Resumo

A equivalência entre resultados para análise de estabilidade baseados no método de Lyapunov de sistemas com atraso precisamente conhecidos e resultados de estabilidade robusta de sistemas de comparação sem atraso empregando condições do teorema do ganho pequeno, foi apresentada recentemente na literatura. A extensão desses resultados para tratar sistemas com atraso e incerteza em domínios politópicos é a principal contribuição deste artigo. A partir da definição de uma realização genérica para um sistema, são apresentadas desigualdades matriciais lineares com variáveis extras, equivalentes a condições de ganho pequeno escalonadas. Devido à inserção dessas variáveis extras, condições dependentes do atraso para análise de estabilidade de sistemas com atraso em domínios politópicos podem ser elaboradas empregando matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetro, resultando em condições menos conservadoras que outras já apresentadas na literatura, como ilustrado por exemplos numéricos.

1 Introdução

A análise de estabilidade de sistemas com atraso de transporte é um tema que vem sendo bastante explorado, o que pode ser visto a partir do grande número de trabalhos publicados recentemente (ver [3], [6], [7] e suas referências). As duas abordagens possíveis na análise de estabilidade de sistemas com atraso são: estabilidade independente do atraso e estabilidade dependente do atraso [10]. Na primeira, o interesse consiste em determinar se o sistema é estável independentemente da magnitude do atraso. A segunda abordagem se preocupa em definir a máxima magnitude do atraso tal que o sistema permaneça estável. Técnicas no domínio do tempo utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii são amplamente empregadas na análise de estabilidade de sistemas com atraso, gerando condições suficientes para a estabilidade do sistema formuladas como desigualdades matriciais lineares (*linear matrix inequalities* em inglês - LMIs) que podem ser resolvidas com algoritmos de tempo polinomial [2].

Uma conexão entre condições Lyapunov para análise de estabilidade de sistemas contínuos com atraso precisamente conhecidos e condições no domínio da frequência do teorema do ganho pequeno escalonado aplicadas

a um sistema de comparação sem atrasos foi apresentada em [11] (ver também [4] e [8]).

A presença de incerteza nos parâmetros do sistema torna a análise de estabilidade uma tarefa mais complexa. Uma maneira de tratar as incertezas paramétricas na análise de sistemas com atraso é utilizar matrizes constantes nos funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Entretanto, essa técnica, conhecida como estabilidade quadrática, pode levar a resultados muito conservadores.

Resultados menos conservadores para estabilidade robusta foram obtidos recentemente através do uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetro e alguns desses resultados foram estendidos para tratar sistemas com atraso.

Este artigo trata da análise de estabilidade dependente do atraso de sistemas contínuos com atraso e parâmetros representados em politopos utilizando as condições LMI de ganho pequeno escalonado. O atraso e os parâmetros do sistema são considerados invariantes no tempo. Condições suficientes na forma de LMIs, dependentes do atraso, são formuladas em termos dos vértices do politopo, estendendo assim os resultados da literatura para o caso incerto, introduzindo também novas condições LMI com variáveis extras.

Mostra-se, através de exemplos numéricos, que as novas condições com matrizes extras reduzem o conservadorismo na análise de estabilidade robusta dependente do atraso de sistemas contínuos com atraso.

2 Preliminares

Considere o sistema contínuo dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) \quad (1)$$

cujas condições iniciais são

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], t_0, \phi \in \mathbb{R}_+ \times C_\tau^V \quad (2)$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $\tau > 0$ é um atraso de transporte constante.

O sistema com atraso (1)-(2) foi analisado em [11] através da definição de um sistema de comparação com uma variável matricial livre, reescrito como a interconexão de um sistema linear invariante no tempo $G(s)$ com um bloco Δ representando a incerteza estruturada,

$\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \Delta_2\} = \{\lambda_1 \mathbf{I}_{n_1}, \lambda_2 \mathbf{I}_{n_2}\}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Desse modo, a estabilidade do sistema (1)-(2) para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ é garantida pela estabilidade robusta do sistema mostrado na Figura 1, como descrito no seguinte lema:

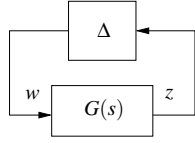


Figura 1: Sistema $G(s)$ afetado pela incerteza Δ .

Lema 1 Considere o sistema interconectado mostrado na Figura 1 com $\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$, $\Delta_i = \lambda_i \mathbf{I}_{n_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, r$, $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ e $G(s)$ com realização mínima dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}w \\ z = Cx + \mathcal{D}w \end{cases} \quad (3)$$

Então o sistema em malha fechada é estável se existirem matrizes $P = P' > 0$, $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, e $Q = \text{diag}\{Q_1, \dots, Q_r\} > 0$, $Q_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$, $i = 1, \dots, r$ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & P\mathcal{B} & C'Q \\ * & -Q & \mathcal{D}'Q \\ * & * & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

No lema que segue são propostas condições LMI equivalentes às obtidas no Lema 1, porém com variáveis matriciais extras.

Lema 2 Existem matrizes $P = P' > 0$, $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, e $Q = \text{diag}\{Q_1, \dots, Q_r\} > 0$, $Q_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$, $i = 1, \dots, r$ tais que (4) no Lema 1 é satisfeita se e somente se existirem $P = P' > 0$, $Q = \text{diag}\{Q_1, \dots, Q_r\} > 0$, $Q_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$, $i = 1, \dots, r$ e X de dimensão apropriada tais que

$$\tilde{Q} + X\tilde{B} + \tilde{B}'X' < 0 \quad (5)$$

com

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & Q & \mathbf{0} \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathcal{A} & \mathbf{0} & -\mathcal{B} \\ \mathbf{0} & -C & \mathbf{I} & -\mathcal{D} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Prova: Usando o complemento de Schur, pode ser mostrado que (4) é equivalente a $\begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix}' < 0$ com

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} + C'QC & P\mathcal{B} + C'Q\mathcal{D} \\ * & -Q + \mathcal{D}'Q\mathcal{D} \end{bmatrix} < 0$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} & (x'\mathcal{A}' + w'\mathcal{B}')Px + x'P(\mathcal{A}x + \mathcal{B}w) \\ & + (x'C' + w'\mathcal{D}')Q(Cx + \mathcal{D}w) - w'Qw < 0 \end{aligned}$$

Agora, usando (3) e definindo $\zeta = \begin{bmatrix} \dot{x}' & x' & z' & w' \end{bmatrix}'$, obtém-se $\tilde{B}\zeta = 0$ com \tilde{B} dado por (7) e $x'Px + x'P\dot{x} + z'Qz - w'Qw = \zeta\tilde{Q}\zeta$ com \tilde{Q} dada por (6). Finalmente,

usando resultados do Lema de Finsler (ver [1]), existe \tilde{Q} tais que $\zeta\tilde{Q}\zeta < 0$, $\forall \zeta : \tilde{B}\zeta = 0$ se e somente se existirem \tilde{Q} e X tal que a equação (5) é satisfeita. ■

As condições apresentadas no Lema 2 são equivalentes às condições dadas no Lema 1 quando \mathcal{A} , \mathcal{B} , C , e \mathcal{D} são matrizes precisamente conhecidas. Entretanto, as variáveis matriciais introduzidas proporcionam graus de liberdade úteis que podem ser usados na análise de sistemas incertos em domínios politópicos, como apresentado em [5].

Nas próximas seções será mostrado como duas das escolhas particulares para $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, C, \mathcal{D})$ usadas em [11] também podem ser usadas nas condições do Lema 2. Além disso, são apresentadas condições LMI dependentes de parâmetro assegurando a estabilidade robusta do sistema (1)-(2) com matrizes incertas (A, A_τ) pertencendo a um domínio politópico. Como em [11], as condições são apresentadas para sistemas com apenas um atraso, mas são facilmente extensíveis para analisar estabilidade de sistemas com múltiplos atrasos.

3 Resultados Principais

3.1 Sistemas Precisamente Conhecidos

Dois condições suficientes para análise de estabilidade do sistema (1)-(2) são obtidas com escolhas especiais de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, C, \mathcal{D})$ aplicadas ao Lema 2.

Lema 3 O sistema (1)-(2) é assintoticamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P = P' > 0$, $V = V' > 0$, $U = U' > 0$, F_i , G_i , H_i , $i = 1, \dots, 6$ tais que (8) é satisfeita, com

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -F_1(A + A_\tau) - G_1A - H_1A_\tau + F_2' + P \\ \Psi_2 &= -F_2(A + A_\tau) - G_2A - H_2A_\tau - (A' + A_\tau')F_2' - A'G_2' - A_\tau'H_2' \\ \Psi_3 &= G_2 - (A' + A_\tau')F_3' - A'G_3' - A_\tau'H_3' \\ \Psi_4 &= H_3 - (A' + A_\tau')F_4' - A'G_4' - A_\tau'H_4' \\ \Psi_5 &= -\bar{\tau}F_2A_\tau - (A' + A_\tau')F_5' - A'G_5' - A_\tau'H_5' \\ \Psi_6 &= -\bar{\tau}F_2A_\tau - (A' + A_\tau')F_6' - A'G_6' - A_\tau'H_6' \end{aligned}$$

Prova: Em [11], mostra-se que a escolha

$$\mathcal{A} = A + A_\tau, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}A_\tau & \bar{\tau}A_\tau \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} A \\ A_\tau \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \mathbf{0} \quad (9)$$

substituída no Lema 1 resulta em condições suficientes para a estabilidade do sistema (1)-(2) para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$. A mesma escolha aplicada ao Lema 2 leva às LMIs do Lema 3, com \tilde{Q} descrito por (6) e

$$Q = \text{diag}\{V, U\}$$

$$x = \begin{bmatrix} F_1' & F_2' & F_3' & F_4' & F_5' & F_6' \\ G_1' & G_2' & G_3' & G_4' & G_5' & G_6' \\ H_1' & H_2' & H_3' & H_4' & H_5' & H_6' \end{bmatrix}' \quad (10)$$

Lema 4 O sistema (1)-(2) é assintoticamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P = P' > 0$, $V = V' > 0$,

$$\begin{bmatrix} F_1 + F'_1 & \Psi_1 & G_1 + F'_3 & H_1 + F'_4 & -\bar{\tau}F_1A_\tau + F'_5 & -\bar{\tau}F_1A_\tau + F'_6 \\ * & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \Psi_6 \\ * & * & G_3 + G'_3 + V & H_3 + G'_4 & -\bar{\tau}F_3A_\tau + G'_5 & -\bar{\tau}F_3A_\tau + G'_6 \\ * & * & * & H_4 + H'_4 + U & -\bar{\tau}F_4A_\tau + H'_5 & -\bar{\tau}F_4A_\tau + H'_6 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}F_5A_\tau - \bar{\tau}A'_\tau F'_5 - V & -\bar{\tau}F_5A_\tau - \bar{\tau}A'_\tau F'_6 \\ * & * & * & * & * & -\bar{\tau}F_6A_\tau - \bar{\tau}A'_\tau F'_6 - U \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} F_1 + F'_1 & \Phi_1 & G_1 + F'_3 & H_1 + F'_4 & -\bar{\tau}F_1 - \bar{\tau}N_1 + F'_5 & N_1A_\tau - G_1A_\tau A_\tau + F'_6 \\ * & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_5 & \Phi_6 \\ * & * & G_3 + G'_3 + V & H_3 + G'_4 & -\bar{\tau}F_3 - \bar{\tau}N_3 + G'_5 & N_3A_\tau - G_3A_\tau A_\tau + G'_6 \\ * & * & * & H_4 + H'_4 + U & -\bar{\tau}F_4 - \bar{\tau}N_4 + H'_5 & N_4A_\tau - G_4A_\tau A_\tau + H'_6 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}F_5 - \bar{\tau}N_5 - \bar{\tau}F'_5 - \bar{\tau}N'_5 - V & N_5A_\tau - G_5A_\tau A_\tau - \bar{\tau}(F'_6 + N'_6) \\ * & * & * & * & * & \Phi_7 \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$U = U' > 0, N_i, F_i, G_i, H_i, i = 1, \dots, 6$ tais que a equação (11) é satisfeita, com

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -F_1A - (F_1 + N_1)A_\tau - G_1A_\tau A - H_1 + F'_2 + P \\ \Phi_2 &= -F_2A - A'F'_2 - (F_2 + N_2)A_\tau - A'_\tau(F'_2 + N'_2) \\ &\quad - G_2A_\tau A - A'A'_\tau G'_2 - H_3 - H'_3 \\ \Phi_3 &= G_2 - A'F'_3 - A'_\tau(N'_3 + F'_3) - A'A'_\tau G'_3 - H'_3 \\ \Phi_4 &= H_3 - A'F'_4 - A'_\tau(N'_4 + G'_4) - A'A'_\tau G'_4 - H'_4 \\ \Phi_5 &= -\bar{\tau}F_2 - \bar{\tau}N_2 - A'F'_5 - A'_\tau(N'_5 + F'_5) - A'A'_\tau G'_5 - H'_5 \\ \Phi_6 &= -N_2A_\tau - G_2A_\tau A_\tau - A'F'_6 \\ &\quad - A'_\tau(N'_6 + F'_6) - A'A'_\tau G'_6 - H'_6 \\ \Phi_7 &= -N_6A_\tau - G_6A_\tau A_\tau + A'_\tau N'_6 - A'A'_\tau G'_6 - U \end{aligned}$$

Prova: Semelhantemente, a escolha

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A + MA_\tau, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}M & (\mathbf{I} - M)A_\tau \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} A_\tau A \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A_\tau A_\tau \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

substituída no Lema 1 resultou em [11] em condições suficientes para a estabilidade do sistema (1)-(2) para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ com M sendo considerada uma variável matricial livre. Com a mesma escolha empregada no Lema 2 e realizando a substituição de variáveis $F_i M = N_i + F_i, i = 1, \dots, 6$ obtêm-se as condições do Lema 4. Como feito em [11], essa mudança de variáveis é possível pois M e N_i são variáveis livres, relacionadas entre si pela expressão $N_i = F_i(M - \mathbf{I}), i = 1, \dots, 6$. ■

3.2 Análise de Sistemas Incertos

Considere que as matrizes A and A_τ não são precisamente conhecidas, mas pertencem a um domínio politópico de incerteza \mathcal{P} dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ (A, A_\tau)(\xi) : (A, A_\tau)(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j (A, A_\tau)_j ; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 ; \xi_j \geq 0 \right\} \quad (13)$$

Qualquer par de matrizes no conjunto \mathcal{P} pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices $(A, A_\tau)_j$ do politopo. Nas LMIs seguintes, as matrizes A_j e $A_{\tau j}$, mesmo aparecendo separadamente, correspondem ao vértice $(A, A_\tau)_j$ de $\mathcal{P}, j = 1, \dots, N$.

Na literatura, as condições de estabilidade robusta para sistemas com atraso descritos por (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ geralmente empregam estabilidade quadrática (P e Q são consideradas matrizes constantes nos lemas 1 e 2). A estabilidade quadrática pode ser verificada para todo $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ testando as condições (por exemplo a condição do Lema 1) nos vértices $(A, A_\tau)_j$ de $\mathcal{P}, j = 1, \dots, N$ do politopo. Resultados menos conservadores que possuem a estabilidade quadrática como um caso particular podem ser obtidos considerando matrizes dependentes de parâmetro $P(\xi) = P(\xi)' > 0$ e $Q(\xi) = Q(\xi)' > 0$ dadas por

$$P(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j P_j; Q(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j Q_j; \sum_{j=1}^N \xi_j = 1; \xi_j \geq 0 \quad (14)$$

no Lema 1. Empregando a escolha dada por (9) para $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, nos vértices de \mathcal{P} , a estabilidade robusta do sistema (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ é garantida pelos seguintes lemas.

Lema 5 *O sistema (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ dado por (13) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P'_j > 0$ e*

$$Q_j = Q'_j = \text{diag}\{V_j, U_j\} > 0 \quad (15)$$

tais que

$$W_j = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_j P_j + P_j \mathcal{A}_j & P_j \mathcal{B}_j & \mathcal{C}'_j Q_j \\ * & -Q_j & \mathcal{D}'_j Q_j \\ * & * & -Q_j \end{bmatrix} < 0; \quad j = 1, \dots, N \quad (16)$$

$$W_{jk} = \begin{bmatrix} \Xi & P_k \mathcal{B}_j + P_j \mathcal{B}_k & \mathcal{C}'_j Q_k + \mathcal{C}'_k Q_j \\ * & -Q_j - Q_k & \mathcal{D}'_j Q_k + \mathcal{D}'_k Q_j \\ * & * & -Q_j - Q_k \end{bmatrix} < 0; \quad j = 1, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N \quad (17)$$

com $\Xi = \mathcal{A}'_j P_k + P_k \mathcal{A}_j + \mathcal{A}'_k P_j + P_j \mathcal{A}_k e$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j &= A_j + A_{\tau j}, \mathcal{B}_j = \begin{bmatrix} \bar{\tau}A_{\tau j} & \bar{\tau}A_{\tau j} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C}_j &= \begin{bmatrix} A_j \\ A_{\tau j} \end{bmatrix}, \mathcal{D}_j = \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (18)$$

Prova: Com a escolha $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$ dada por (18), $P(\xi) = P(\xi)' > 0$ e $Q(\xi) = Q(\xi)' > 0$ dadas por (14), substituindo-se nas condições do Lema 5 tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\xi)'P(\xi) + P(\xi)\mathcal{A}(\xi) & P(\xi)\mathcal{B}(\xi) & \mathcal{C}(\xi)'Q(\xi) \\ * & -Q(\xi) & \mathcal{D}(\xi)'Q(\xi) \\ * & * & -Q(\xi) \end{bmatrix} \\ = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 W_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \xi_j \xi_k W_{jk} < 0 \quad (19)$$

o que assegura que o sistema incerto (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ dado por (13) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$. ■ Usando os graus de liberdade extras proporcionados pela matriz \mathcal{X} no Lema 2, o seguinte resultado é proposto.

Lema 6 *O sistema (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ dado por (13) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P_j' > 0, Q_j = Q_j' > 0$ dadas por (15) e $x_j, j = 1, \dots, N$ com dimensões adequadas tais que*

$$\tilde{Q}_j + x_j \tilde{B}_j + \tilde{B}_j' x_j' < 0; j = 1, \dots, N \quad (20)$$

$$\tilde{Q}_j + \tilde{Q}_k + x_j \tilde{B}_k + x_k \tilde{B}_j + \tilde{B}_j' x_k' + \tilde{B}_k' x_j' < 0; \\ j = 1, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N \quad (21)$$

com $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$ dadas em (18) e

$$\tilde{Q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & Q_j & \mathbf{0} \\ * & * & * & -Q_j \end{bmatrix}; j = 1, \dots, N \quad (22)$$

Prova: A prova é bastante semelhante à prova do Lema 5. As LMIs do Lema 6 asseguram que existem $P(\xi) = P(\xi)' > 0$ e $Q(\xi) = Q(\xi)' > 0$ como em (14) e $\mathcal{X}(\xi)$ dada por

$$\mathcal{X}(\xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j x_j, \quad \sum_{j=1}^N \xi_j = 1, \quad \xi_j \geq 0 \quad (23)$$

tais que

$$\tilde{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi) \tilde{B}(\xi) + \tilde{B}(\xi)' \mathcal{X}(\xi)' < 0 \quad (24)$$

que, de acordo com o Lema 2, é equivalente a (19). ■

É importante enfatizar que, embora as LMIs dependentes de parâmetro (19) e (24) sejam equivalentes, as variáveis matriciais extras \mathcal{X}_j no Lema 6 fazem com que as condições suficientes do Lema 6 assegurando (24) sejam menos conservadoras que as condições suficientes do Lema 5 (que asseguram que (19) é satisfeita).

Como feito para sistemas precisamente conhecidos, a escolha de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ dada por (12) nos vértices do politopo \mathcal{P} resulta em condições de estabilidade robusta dependentes do atraso para o sistema (1)-(2).

Lema 7 *O sistema (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ dado por (13) é robustamente estável $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P_j' > 0, V_j = V_j' > 0, U_j = U_j' > 0$ e $\mathcal{X}_j, j = 1, \dots, N$ com dimensões adequadas tais que as LMIs (25), (26) e (27) sejam satisfeitas.*

Prova: Semelhante às provas dos lemas 5 e 6. ■

Lema 8 *O sistema (1)-(2) com $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$ dado por (13) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P_j' > 0, V_j = V_j' > 0, U_j = U_j' > 0$ e $\mathcal{X}_{1j}, G_{1j}, H_{1j}, \dots, \mathcal{X}_{6j}, G_{6j}, H_{6j}, j = 1, \dots, N$ de dimensões adequadas tais que as LMIs (28) sejam satisfeitas.*

Prova: Semelhante às provas dos lemas 5 e 6. As LMIs (28) são suficientes para garantir que $P(\xi) = P(\xi)' > 0, Q(\xi) = Q(\xi)' > 0$ dadas por (14) com Q_j definida em (15) e $\mathcal{X}(\xi)$ dada por (23) com x_j particionada como em (10) verificam as condições do Lema (4) para todo $(A, A_\tau) \in \mathcal{P}$. ■

Note que as LMIs (28) poderiam ser escritas separadamente em três expressões para evitar redundâncias, semelhantemente ao apresentado no Lema 7. A formulação adotada no Lema 8 foi escolhida para evitar a apresentação de outras duas LMIs de tamanho semelhante. Também vale destacar que os lemas 6 e 8 podem ser usados com a matriz \mathcal{X} fixa, resultando em uma condição mais simples porém mais conservadora.

Os Lemas 7 e 8 mantêm o grau de liberdade representado pela matriz M , como em [11], sendo que os melhores resultados para estabilidade dependente do atraso foram obtidos quando M é considerada uma variável matricial livre (porém fixa).

4 Exemplo Numérico

Considere o sistema incerto apresentado em [9] com vértices dados por

$$(A, A_\tau)_1 = \begin{bmatrix} -1.3451 & 0.6510 \\ 0.6135 & -0.3007 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0025 & -0.7350 \\ 0.0859 & -0.0086 \end{bmatrix} \\ (A, A_\tau)_2 = \begin{bmatrix} -0.1849 & 0.1202 \\ -0.9822 & 0.1787 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.3219 & 0.1123 \\ 0.4372 & -0.1571 \end{bmatrix}$$

O atraso máximo $\bar{\tau}$ para o qual a estabilidade robusta é assegurada foi calculado testando as condições dos lemas 5 (L5), 6 (L6), 7 (L7) and 8 (L8), resultando nos seguintes valores: $\bar{\tau}_{L5} = 0.448, \bar{\tau}_{L6} = 0.712, \bar{\tau}_{L7} = 1.288$ e $\bar{\tau}_{L8} = 2.191$ (em [9] o melhor resultado obtido foi $\bar{\tau} = 1.480$).

5 Conclusões

Extensões de resultados para análise de estabilidade dependente do atraso, baseados em condições LMI do teorema do ganho pequeno escalonado que se relacionam a funcionais de Lyapunov-Krasovskii, foram propostas em um espaço de parâmetros aumentado com o objetivo de tratar a análise de sistemas contínuos com atraso e incerteza politópica. Através de exemplos numéricos, mostrou-se que as condições LMI propostas podem reduzir o conservadorismo de resultados anteriores apresentados na literatura.

6 Agradecimentos

Às agências CAPES, CNPq e FAPESP.

$$\begin{bmatrix} A'_j P_j + A'_{\tau_j}(\mathcal{N}_j + P_j) + P_j A_j + (\mathcal{N}_j + P_j) A_{\tau_j} & \bar{\tau}(\mathcal{N}_j + P_j) & -\mathcal{N}_j A_{\tau_j} & A'_j A'_{\tau_j} V_j & U_j \\ * & -V_j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -U_j & A'_{\tau_j} A'_{\tau_j} V_j & \mathbf{0} \\ * & * & * & -V_j & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -U_j \end{bmatrix} < 0; j = 1, \dots, N \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & 2\bar{\tau}(\mathcal{N}_j + P_j) + \bar{\tau}(\mathcal{N}_k + P_k) & \Gamma_2 & A'_k A'_{\tau_j} V_j + A'_j A'_{dk} V_j + A'_j A'_{\tau_j} V_k & 2U_j + U_k \\ * & -2V_j - V_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -2U_j - U_k & A'_{dk} A'_{\tau_j} V_j + A'_{\tau_j} A'_{dk} V_j + A'_{\tau_j} A'_{\tau_j} V_k & \mathbf{0} \\ * & * & * & -2V_j - V_k & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -2U_j - U_k \end{bmatrix} < 0; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N, k \neq j \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= A'_j P_j + A'_{\tau_j}(\mathcal{N}_j + P_j) + P_j A_j + (\mathcal{N}'_j + P_j) A_{\tau_j} + A'_j P_k + A'_{\tau_j}(\mathcal{N}_k + P_k) \\ &\quad + P_j A_k + (\mathcal{N}'_j + P_j) A_{dk} + A'_k P_j + A'_{dk}(\mathcal{N}_j + P_j) + P_k A_j + (\mathcal{N}'_j + P_j) A_{\tau_j} \\ \Gamma_2 &= -\mathcal{N}_j A_{\tau_j} - \mathcal{N}_k A_{\tau_j} - \mathcal{N}_j A_{dk} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & 2(\bar{\tau}(\mathcal{N}_j + P_j) + \bar{\tau}(\mathcal{N}_k + P_k) + \bar{\tau}(\mathcal{N}_\ell + P_\ell)) & \Xi_2 & \Xi_3 & 2(U_j + U_k + U_\ell) \\ * & -2(V_j + V_k + V_\ell) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & -2(U_j + U_k + U_\ell) & \Xi_4 & \mathbf{0} \\ * & * & * & -2(V_j + V_k + V_\ell) & \mathbf{0} \\ * & * & * & * & -2(U_j + U_k + U_\ell) \end{bmatrix} < 0; \quad j = 1, \dots, N-2; k = 1, \dots, N-1; \ell = 1, \dots, N \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= A'_j P_k + A'_k P_j + A'_j P_\ell + A'_\ell P_j + A'_k P_\ell + A'_\ell P_k + A'_{\tau_j}(\mathcal{N}_k + P_k) + A'_{dk}(\mathcal{N}_j + P_j) + A'_{\tau_j}(\mathcal{N}_\ell + P_\ell) \\ &\quad + A'_{d\ell}(\mathcal{N}_j + P_j) + A'_{dk}(\mathcal{N}_\ell + P_\ell) + A'_{d\ell}(\mathcal{N}_k + P_k) + P_j A_k + P_k A_j + P_j A_\ell + P_\ell A_j + P_k A_\ell + P_\ell A_k \\ &\quad + (\mathcal{N}'_j + P_j) A_{dk} + (\mathcal{N}'_k + P_k) A_{\tau_j} + (\mathcal{N}'_j + P_j) A_{d\ell} + (\mathcal{N}'_\ell + P_\ell) A_{\tau_j} + (\mathcal{N}'_k + P_k) A_{d\ell} + (\mathcal{N}'_\ell + P_\ell) A_{dk} \\ \Xi_2 &= -\mathcal{N}_j A_{dk} - \mathcal{N}_k A_{\tau_j} - \mathcal{N}_j A_{d\ell} - \mathcal{N}_\ell A_{\tau_j} - \mathcal{N}_k A_{d\ell} - \mathcal{N}_\ell A_{dk} \\ \Xi_3 &= A'_k A'_{\tau_j} V_\ell + A'_k A'_{d\ell} V_j + A'_j A'_{dk} V_\ell + A'_\ell A'_{dk} V_j + A'_j A'_{d\ell} V_k + A'_\ell A'_{\tau_j} V_k \\ \Xi_4 &= A'_{dk} A'_{\tau_j} V_\ell + A'_{dk} A'_{d\ell} V_j + A'_{\tau_j} A'_{dk} V_\ell + A'_{d\ell} A'_{dk} V_j + A'_{\tau_j} A'_{d\ell} V_k + A'_{d\ell} A'_{\tau_j} V_k \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11jkl} & \cdots & \Lambda_{16jkl} \\ * & \ddots & \Lambda_{66jkl} \end{bmatrix} < 0; j, k, \ell = 1, \dots, N \quad (28)$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda_{11jkl} &= F_{1j} + F'_{1j} + F_{1k} + F'_{1k} + F_{1\ell} + F'_{1\ell}; \\ \Lambda_{12jkl} &= -F_{1j} A_j - (F_{1j} + N_{1j}) A_{\tau_j} - F_{1k} A_k - (F_{1k} + N_{1k}) A_{\tau_k} - F_{1\ell} A_\ell - (F_{1\ell} + N_{1\ell}) A_{\tau_\ell} \\ &\quad - G_{1j} A_{\tau_j} A_j - H_{1j} + F'_{2j} + P_j - G_{1k} A_{\tau_k} A_k - H_{1k} + F'_{2k} + P_k - G_{1\ell} A_{\tau_\ell} A_\ell - H_{1\ell} + F'_{2\ell} + P_\ell \\ \Lambda_{13jkl} &= G_{1j} + F'_{3j} + G_{1k} + F'_{3k} + G_{1\ell} + F'_{3\ell}; \quad \Lambda_{14jkl} = H_{1j} + F'_{4j} + H_{1k} + F'_{4k} + H_{1\ell} + F'_{4\ell} \\ \Lambda_{15jkl} &= -\bar{\tau} F_{1j} - \bar{\tau} N_{1j} + F'_{5j} - \bar{\tau} F_{1k} - \bar{\tau} N_{1k} + F'_{5k} - \bar{\tau} F_{1\ell} - \bar{\tau} N_{1\ell} + F'_{5\ell} \\ \Lambda_{16jkl} &= N_{1j} A_{\tau_j} - G_{1j} A_{\tau_j} A_{\tau_j} + F'_{6j} + N_{1k} A_{\tau_k} - G_{1k} A_{\tau_k} A_{\tau_k} + F'_{6k} + N_{1\ell} A_{\tau_\ell} - G_{1\ell} A_{\tau_\ell} A_{\tau_\ell} + F'_{6\ell} \\ \Lambda_{22jkl} &= -F_{2j} A_j - A'_j F'_{2j} - (F_{2j} + N_{2j}) A_{\tau_j} - A'_{\tau_j} (F'_{2j} + N'_{2j}) - G_{2j} A_{\tau_j} A_j - A'_j A'_{\tau_j} G'_{2j} - H_{3j} - H'_{3j} \\ &\quad - F_{2k} A_k - A'_k F'_{2k} - (F_{2k} + N_{2k}) A_{\tau_k} - A'_{\tau_k} (F'_{2k} + N'_{2k}) - G_{2k} A_{\tau_k} A_k - A'_k A'_{\tau_k} G'_{2k} - H_{3k} - H'_{3k} \\ &\quad - F_{2\ell} A_\ell - A'_\ell F'_{2\ell} - (F_{2\ell} + N_{2\ell}) A_{\tau_\ell} - A'_{\tau_\ell} (F'_{2\ell} + N'_{2\ell}) - G_{2\ell} A_{\tau_\ell} A_\ell - A'_\ell A'_{\tau_\ell} G'_{2\ell} - H_{3\ell} - H'_{3\ell} \\ \Lambda_{23jkl} &= G_{2j} - A'_j F'_{3j} - A'_{\tau_j} (N'_{3j} + F'_{3j}) - A'_j A'_{\tau_j} G'_{3j} - H'_{3j} + G_{2k} - A'_k F'_{3k} - A'_{\tau_k} (N'_{3k} + F'_{3k}) - A'_k A'_{\tau_k} G'_{3k} - H'_{3k} \\ &\quad + G_{2\ell} - A'_\ell F'_{3\ell} - A'_{\tau_\ell} (N'_{3\ell} + F'_{3\ell}) - A'_\ell A'_{\tau_\ell} G'_{3\ell} - H'_{3\ell} \\ \Lambda_{24jkl} &= H_{3j} - A'_j F'_{4j} - A'_{\tau_j} (N'_{4j} + G'_{4j}) - A'_j A'_{\tau_j} G'_{4j} - H'_{4j} + H_{3k} - A'_k F'_{4k} - A'_{\tau_k} (N'_{4k} + G'_{4k}) - A'_k A'_{\tau_k} G'_{4k} - H'_{4k} \\ &\quad + H_{3\ell} - A'_\ell F'_{4\ell} - A'_{\tau_\ell} (N'_{4\ell} + G'_{4\ell}) - A'_\ell A'_{\tau_\ell} G'_{4\ell} - H'_{4\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{25jkl} &= -\bar{\tau}F_{2j} - \bar{\tau}N_{2j} - A'_jF'_{5j} - A'_{\tau j}(N'_{5j} + F'_{5j}) - A'_jA'_{\tau j}G'_{5j} - H'_{5j} - \bar{\tau}F_{2k} - \bar{\tau}N_{2k} - A'_kF'_{5k} \\
&\quad - A'_{\tau k}(N'_{5k} + F'_{5k}) - A'_kA'_{\tau k}G'_{5k} - H'_{5k} - \bar{\tau}F_{2\ell} - \bar{\tau}N_{2\ell} - A'_\ell F'_{5\ell} - A'_{\tau \ell}(N'_{5\ell} + F'_{5\ell}) - A'_\ell A'_{\tau \ell}G'_{5\ell} - H'_{5\ell} \\
\Lambda_{26jkl} &= -N_{2j}A_{\tau j} - G_{2j}A_{\tau j}A_{\tau j} - A'_jF'_{6j} - A'_{\tau j}(N'_{6j} + F'_{6j}) - A'_jA'_{\tau j}G'_{6j} - H'_{6j} - N_{2k}A_{\tau k} - G_{2k}A_{\tau k}A_{\tau k} - A'_kF'_{6k} \\
&\quad - A'_{\tau k}(N'_{6k} + F'_{6k}) - A'_kA'_{\tau k}G'_{6k} - H'_{6k} - N_{2\ell}A_{\tau \ell} - G_{2\ell}A_{\tau \ell}A_{\tau \ell} - A'_\ell F'_{6\ell} - A'_{\tau \ell}(N'_{6\ell} + F'_{6\ell}) - A'_\ell A'_{\tau \ell}G'_{6\ell} - H'_{6\ell} \\
\Lambda_{33jkl} &= G_{3j} + G'_{3j} + V_j + G_{3k} + G'_{3k} + V_k + G_{3\ell} + G'_{3\ell} + V_\ell; \Lambda_{34jkl} = H_{3j} + G'_{4j} + H_{3k} + G'_{4k} + H_{3\ell} + G'_{4\ell} \\
\Lambda_{35jkl} &= -\bar{\tau}F_{3j} - \bar{\tau}N_{3j} + G'_{5j} - \bar{\tau}F_{3k} - \bar{\tau}N_{3k} + G'_{5k} - \bar{\tau}F_{3\ell} - \bar{\tau}N_{3\ell} + G'_{5\ell} \\
\Lambda_{36jkl} &= N_{3j}A_{\tau j} - G_{3j}A_{\tau j}A_{\tau j} + G'_{6j} + N_{3k}A_{\tau k} - G_{3k}A_{\tau k}A_{\tau k} + G'_{6k} + N_{3\ell}A_{\tau \ell} - G_{3\ell}A_{\tau \ell}A_{\tau \ell} + G'_{6\ell} \\
\Lambda_{44jkl} &= H_{4j} + H'_{4j} + U_j + H_{4k} + H'_{4k} + U_k + H_{4\ell} + H'_{4\ell} + U_\ell; \\
\Lambda_{45jkl} &= -\bar{\tau}F_{4j} - \bar{\tau}N_{4j} + H'_{5j} - \bar{\tau}F_{4k} - \bar{\tau}N_{4k} + H'_{5k} - \bar{\tau}F_{4\ell} - \bar{\tau}N_{4\ell} + H'_{5\ell} \\
\Lambda_{45jkl} &= N_{4j}A_{\tau j} - G_{4j}A_{\tau j}A_{\tau j} + H'_{6j} + N_{4k}A_{\tau k} - G_{4k}A_{\tau k}A_{\tau k} + H'_{6k} + N_{4\ell}A_{\tau \ell} - G_{4\ell}A_{\tau \ell}A_{\tau \ell} + H'_{6\ell} \\
\Lambda_{55jkl} &= -\bar{\tau}F_{5j} - \bar{\tau}N_{5j} - \bar{\tau}F'_{5j} - \bar{\tau}N'_{5j} - V_k - \bar{\tau}F_{5k} - \bar{\tau}N_{5k} - \bar{\tau}F'_{5k} - \bar{\tau}N'_{5k} - V_\ell - \bar{\tau}F_{5\ell} - \bar{\tau}N_{5\ell} - \bar{\tau}F'_{5\ell} - \bar{\tau}N'_{5\ell} - V_\ell \\
\Lambda_{56jkl} &= N_{5j}A_{\tau j} - G_{5j}A_{\tau j}A_{\tau j} - \bar{\tau}(F'_{6j} + N'_{6j}) + N_{5k}A_{\tau k} - G_{5k}A_{\tau k}A_{\tau k} - \bar{\tau}(F'_{6k} + N'_{6k}) + N_{5\ell}A_{\tau \ell} \\
&\quad - G_{5\ell}A_{\tau \ell}A_{\tau \ell} - \bar{\tau}(F'_{6\ell} + N'_{6\ell}) \\
\Lambda_{66jkl} &= -N_{6j}A_{\tau j} - G_{6j}A_{\tau j}A_{\tau j} + A'_{\tau j}N'_{6j} - A'_{\tau j}A'_{\tau j}G'_{6j} - U_j - N_{6k}A_{\tau k} - G_{6k}A_{\tau k}A_{\tau k} + A'_{\tau k}N'_{6k} - A'_{\tau k}A'_{\tau k}G'_{6k} - U_k \\
&\quad - N_{6\ell}A_{\tau \ell} - G_{6\ell}A_{\tau \ell}A_{\tau \ell} + A'_{\tau \ell}N'_{6\ell} - A'_{\tau \ell}A'_{\tau \ell}G'_{6\ell} - U_\ell
\end{aligned}$$

Referências

- [1] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [2] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [3] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, Boston, 2003.
- [4] Y. Huang and K. Zhou. Robust control of uncertain time delay systems. In *Proc. 38th IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 1130–1135, 1999.
- [5] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 48(3):500–504, March 2003.
- [6] M. S. Mahmoud. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*. Control Engineering Series. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.
- [7] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [8] S.-I. Niculescu and J. Chen. Frequency sweeping tests for asymptotic stability: a model transformation for multiple delays. In *Proc. 38th IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 4678–4683, 1999.
- [9] P. L. D. Peres, S. Tarbouriech, G. Garcia, and V. J. S. Leite. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proc. 2003 Eur. Control Conf.*, volume 1, page 6, September 2003.
- [10] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, October 2003.
- [11] J. Zhang, K. R. Knopse, and P. Tsiotras. Stability of time-delay systems: equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46(3):482–486, March 2001.