

Análise Intervalar de Circuitos Elétricos

Pablo S. Grigoletti¹, Graçaliz P. Dimuro¹,

Luciano V. Barboza^{2,3}, Renata H.S. Reiser¹

¹ Escola de Informática, Universidade Católica de Pelotas,

² Escola de Engenharia e Arquitetura, Universidade Católica de Pelotas,

³ Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas,

96010-000, Pelotas, RS

E-mail: { pablogri, liz, luciano, reiser }@ucpel.tche.br

1 Introdução

A modelagem de eventos físicos através de técnicas computacionais possui uma grande limitação em termos da confiabilidade de parâmetros utilizados. Os dados usados para se realizar a modelagem de qualquer evento físico são obtidos, via de regra, por medições. Estes dados apresentam intrinsecamente um erro, quer seja por falha humana (erros de leitura), quer seja por deficiência mecânica dos próprios instrumentos (erro do instrumento).

Por outro lado, a representação numérica utilizada nos computadores digitais nem sempre permite que os números sejam armazenados com exatidão [8]. Isto pode gerar erros de truncamento e/ou arredondamento tanto na modelagem como na execução dos cálculos operacionais [7].

Devido principalmente a estes fatores, modelar eventos físicos se torna uma tarefa na qual apenas aproximações destes podem ser obtidas. Em alguns casos, aproximações bastante pobres são obtidas o que torna necessário a execução de tarefas auxiliares de modo a se poder avaliar os erros associados ao problema. Este tipo de análise, além de dispendir um considerável esforço computacional, não é uma das tarefas mais simples de ser operacionalizada.

Neste contexto, a Matemática Intervalar se apresenta como uma ferramenta poderosa para a análise e controle de erros em computação científica [6, 9]. Pela sua natureza de tratar os números não mais como entes pontuais e, sim, como intervalos que encapsulam os números pontuais, pode-se de uma forma segura armazenar os dados físicos através de uma medida provável e um possível percentual de erro associado. Isto faz com que ao final do processo matemático-computacional, se tenha uma estimativa da influência destes erros de entrada no resultado final obtido.

Especificamente na área de Engenharia Elétrica, a maioria dos componentes utilizados possuem um valor nominal e uma tolerância associada (dados fornecidos pelos fabricantes). O valor nominal cor-

responde ao provável valor que o componente deve apresentar e a tolerância indica o quanto o valor real do componente pode variar em torno do valor nominal. Por exemplo, pode-se dispor de um resistor de 10 k Ω – 5%. Isto significa que o seu valor nominal corresponde a 10 k Ω , entretanto o seu valor verdadeiro pode ficar situado em qualquer valor entre 9,5 e 10,5 k Ω .

Além disso, todas as medidas de correntes e tensões são obtidas através da leitura de instrumentos de medição. Estes instrumentos pela sua natureza apresentam intrinsecamente um erro associado às medidas. Portanto, por maior que seja a precisão do instrumento, o valor efetivamente medido pode não ser encontrado corretamente.

Sob este paradigma, este trabalho apresenta uma proposta de um software para ser utilizado na análise de circuitos elétricos o qual considera a possível existência de erros de medição como também por tolerância de componentes. Os dados de entrada são modelados como variáveis intervalares de modo a que estes erros sejam encapsulados pelos dados intervalares e se possa ao final da análise avaliar a sua influência no resultado final.

A implementação da ferramenta foi realizada na linguagem Python, com características de software livre. Para tanto, foi implementada uma biblioteca Python para a Matemática Intervalar.

Optou-se por utilizar uma metodologia conhecida como *Análise Nodal* para realizar a análise elétrica do circuito. Esta técnica de análise gera um sistema de equações lineares a ser resolvido para a obtenção do resultado. No caso, o sistema linear consiste em um sistema intervalar. Com a aplicação da análise nodal, as incógnitas intervalares são as tensões (ou voltagens) em todos os nós do circuito (pontos do circuito elétrico onde se conectam dois ou mais elementos de circuito).

O presente trabalho está organizado como segue. Na seção 2 é realizada uma revisão sobre a técnica da análise nodal. A seguir, na seção 3 é apresentada uma revisão sobre a Matemática Intervalar e

a resolução de sistemas lineares intervalares. Após, na seção 4 apresenta-se a ferramenta matemático-computacional FINCA (*Free Interval Circuit Analyzer*). A seção 5 mostra alguns resultados obtidos com a aplicação do software FINCA a circuitos elétricos. Nesta seção, os resultados obtidos são avaliados comparando-os com os resultados de um software comercial (*PSpice*®). Na seção 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 Análise Nodal Aplicada a Circuitos Elétricos

Um circuito elétrico é composto por fontes, elementos passivos e elementos de ligação. Os pontos de conexão entre cada elemento de circuito são chamados *nós*. A literatura apresenta várias técnicas matemáticas de análise para circuitos elétricos, entre outras podem ser citadas [5]:

- análise nodal;
- análise de malhas;
- transformação de fontes.

Neste estudo, foi escolhida a técnica de análise nodal por se tratar da mais adequada para a implementação computacional. Uma vez conhecidos os elementos componentes do circuito elétrico, uma leitura sucessiva destes componentes permite a modelagem do respectivo circuito elétrico.

A análise nodal se baseia na conexão entre os diferentes tipos de elementos de circuito e possui o seu referencial teórico na *Lei das correntes de Kirchhoff*. Esta estabelece que:

“A soma das correntes que chegam em um nó é igual à soma das correntes que saem deste nó”.

Esta lei nada mais é do que a lei da conservação da energia elétrica. Baseado neste princípio, as equações nodais para cada nó do circuito elétrico podem ser resumidas no seguinte [4, 10]:

- *Lado esquerdo*: soma de produtos condutância por tensão. Um destes produtos corresponde à soma de todas as condutâncias conectadas ao nó em análise pela respectiva tensão do nó. Os demais produtos correspondem ao simétrico da tensão de nós adjacentes multiplicadas pela condutância que conecta estes dois nós.
- *Lado direito*: corresponde à soma de correntes provenientes de fontes de corrente. Considera-se a corrente positiva se esta chegar ao nó em análise; caso contrário, esta será considerada negativa.

Observe que pela formulação desta técnica de análise, as incógnitas do sistema linear a ser resolvido correspondem às tensões nodais.

A Figura 1 apresenta um exemplo de um circuito elétrico hipotético. Para este circuito, tomando o nó “0” como referência para as tensões, as suas equações nodais são:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_A - \frac{1}{R_2}V_B = I_1 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{R_2}V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_B - \frac{1}{R_4}V_C = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{R_4}V_B + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_C = I_2 \quad (3)$$

Neste exemplo, tem-se um circuito elétrico com quatro nós: A , B , C e 0 . Tomando-se o nó “0” como referência, obtém-se um sistema linear de três equações com três incógnitas para a determinação das outras tensões nodais (V_A , V_B e V_C).

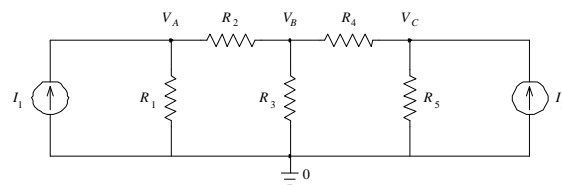


Figura 1: Circuito elétrico hipotético

3 A Matemática Intervalar

A Matemática Intervalar considera um conjunto de métodos para manipulação de intervalos numéricos que aproximam dados incertos. Estes métodos baseiam-se na definição da aritmética intervalar e do produto escalar ótimo [8]. O princípio da máxima exatidão garante (através dos arredondamentos direcionados) o controle automático dos erros de resultados de computações numéricas.

Um *intervalo real* X é um conjunto não vazio de números reais \mathbb{R} ,

$$X = [x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$$

onde x_1 é o extremo inferior (ou *ínfimo*) e x_2 é o extremo superior (ou *supremo*). O conjunto de intervalos reais é denotado por \mathbb{IR} .

Um intervalo real $X = [x_1, x_2] \in \mathbb{IR}$ pode não ser representável em uma máquina se x_1 e x_2 não são números do sistema de ponto flutuante da máquina. Para obter um intervalo arredondado \tilde{X} tal que $X \subseteq \tilde{X}$ (i.e., \tilde{X} é uma aproximação de X), x_1 e x_2 devem ser arredondados “por falta” e “por excesso”, respectivamente, o que se denomina de *arredondamento direcionado*.

O *ponto médio*, o *diâmetro* e o *raio* de um intervalo X são definidos, respectivamente, como $mid(X) = \tilde{X} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $diam(X) = x_2 - x_1$ and

$rad(X) = \frac{1}{2}diam(X)$. O intervalo X pode também ser denotado por $X = \langle mid(X), rad(X) \rangle$.

As operações aritméticas intervalares são definidas de forma que o intervalo resultado engloba todos os possíveis resultados reais [9], o que garante a confiabilidade dos resultados intervalares. As operações aritméticas são então definidas como

$$X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}$$

para $*$ $\in \{+, -, \times, \div\}$, e, para $X = [x_1, x_2]$, $Y = [y_1, y_2] \in \mathbb{IR}$, elas são explicitamente calculadas como:

$$X + Y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2] \quad (4)$$

$$X - Y = [x_1 - y_2, x_2 - y_1] \quad (5)$$

$$X \times Y = [\min \rho, \max \rho] \quad (6)$$

$$\text{with } \rho = \{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\} \quad (7)$$

$$X \div Y = X \times [y_2^{-1}, y_1^{-1}], \text{ if } 0 \notin Y. \quad (8)$$

Para a adição e multiplicação, as propriedades da associatividade e comutatividade são válidas. Entretanto, exceto em casos especiais, a propriedade da distributividade não é válida, o que frequentemente causa uma superestimação.

Um sistema linear intervalar é do tipo $Ax = b$, onde os coeficientes da matrix A e dos vetores x e b são intervalos. Como na aritmética pontual, existem vários métodos para a resolução de SELA's, apresentados em [3, 11].

Os métodos intervalares baseados em propriedades e operações algébricas, tendem a ser uma extensão dos métodos diretos pontuais de resolução de SELA's. Eles são estendidos a métodos intervalares pelo uso de operações a argumentos intervalares [3].

Os estudos sobre versões intervalares para métodos indiretos ou iterativos foram iniciados por E. Hansen e posteriormente foram realizados por um grande número de pesquisadores [9]. O método básico utilizado neste projeto consiste em multiplicar os dois lados de $Ax = b$ por uma matriz Y (uma aproximação da inversa da matriz de pontos médios de A) e definir $E = -I - YA$. Se $\|E\| < 1$, sendo $\|E\| = \max_i \sum_j |E_{ij}|$, então a seqüência

$$X^{(k+1)} = \{Yb + EX^{(k)}\} \cap X^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

com

$$X_i^{(0)} = [-1, 1] \parallel Yb \parallel / (1 - \|E\|), i = 1, 2, \dots, n$$

irá convergir em um número finito de passos para um vetor intervalar x que contenha a solução para $Ax = b$.

Segundo [3], a simples extensão de métodos pontuais em métodos intervalares tem mostrado ser ineficiente, pois não há convergência, como foi observado em [2].

Já que a extensão intervalar dos métodos pontuais não é muito simples e o cálculo da solução por métodos intervalares pode ser dispendioso, uma vez que se está tratando com vetores e matrizes de intervalos, uma alternativa econômica e bastante utilizada é calcular uma aproximação pontual e, a partir desta, melhorá-la através de métodos intervalares. Nesta idéia baseiam-se os métodos híbridos, que constituem uma das metodologias para se trabalhar com intervalos.

A biblioteca Python-XSC, para a Matemática Intervalar, que foi implementada para realização deste trabalho, armazena intervalos tanto na forma de "ínfimo - supremo" como na de "ponto médio - raio". Esta biblioteca possibilita que as operações intervalares básicas sejam executadas sobre escalares intervalares, assim como vetores e matrizes. As funções intervalares padrões como, por exemplo, as trigonométricas, exponencial, logarítmica etc., também estão disponíveis. A biblioteca também disponibiliza rotinas para a solução de sistemas lineares intervalares.

4 O Analisador de Circuitos Elétricos Intervalar FINCA

A determinação de soluções numéricas para problemas físicos, por meio da aplicação de métodos numéricos computacionais, nem sempre fornece valores que se encaixam dentro de um limite aceitável [1]. Isto se deve, principalmente, à representação interna dos números em um sistema computacional.

O objetivo do software *Free Interval Circuit Analyser* (FINCA) é ser uma ferramenta computacional livre para a análise confiável de circuitos elétricos, utilizando para tal a Matemática Intervalar [9]. Para fazer uso das técnicas intervalares o FINCA utiliza o módulo Python-XSC, desenvolvido neste projeto.

O FINCA foi desenvolvido baseado no paradigma de orientação a objetos (OO). Este software está organizado conforme o diagrama apresentado na Figura 2 e é composto basicamente pelas seguintes classes: (i) *circuit*, (ii) *iNodalAnalysis*, (iii) *iIterativeMethod* (Python-XSC), (iv) *reportMaker* e (v) *finca*.

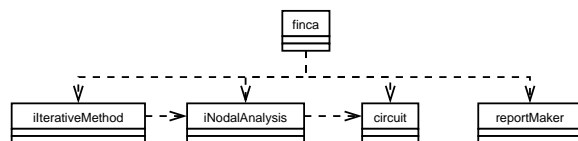


Figura 2: Diagrama de classes da ferramenta FINCA

A classe *circuit* é utilizada no tratamento da entrada de dados, realizando a leitura das informações, contidas na interface gráfica ou em um

arquivo texto, e posteriormente na análise e na geração das estruturas de dados que serão utilizadas pela ferramenta ao longo de todo processo.

A classe *iNodalAnalysis* faz uso das estruturas de dados geradas pela classe *circuit*. A partir destes dados, esta classe realiza a *análise nodal intervalar* e gera dois objetos: uma matriz intervalar (objeto da classe *imatriz*) e um vetor intervalar (objeto da classe *ivector*). Internamente, para a realização da análise nodal intervalar, esta classe faz uso de várias funcionalidades providas pelo módulo Python-XSC.

A classe *iIterativeMethod* faz parte do módulo Python-XSC. Esta classe tem como objetivo principal resolver um SELA intervalar por um método iterativo. Este SELA é do tipo $Ax = b$, onde a matriz A e o vetor b são fornecidos pela análise nodal intervalar (implementada pela classe *iNodalAnalysis*) e o vetor x é o resultado que será gerado, o qual representa as tensões nodais do circuito que está sendo analisado, na forma de intervalo.

A classe *reportMaker* é utilizada na geração de relatórios sobre as atividades realizadas na ferramenta FINCA. Podem ser gerados relatórios no formato HTML, PDF ou TXT. Estes relatórios são baseados nas informações contidas na saída de dados da interface gráfica.

A classe *finca* é a principal desta ferramenta. Esta classe gera toda a interface gráfica, que tem como principal objetivo agrupar as funcionalidades providas pelo FINCA. Esta classe faz uso do módulo wxPython.

Na Figura 3 é apresentada a interface gráfica da ferramenta FINCA. Esta interface é dividida em três áreas principais: (i) uma área que trata da entrada de dados, (ii) uma área que trata da saída de dados e (iii) outras que realiza funcionalidades diversas (barra de ferramentas).

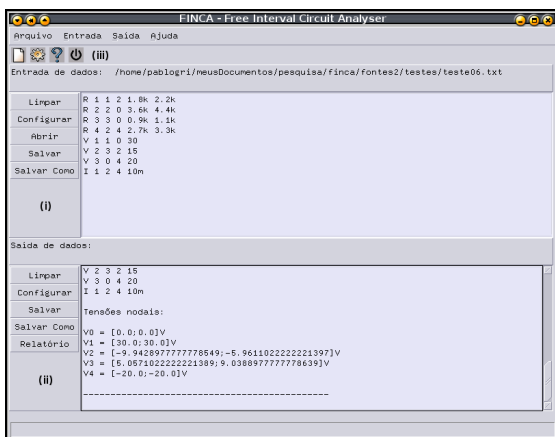


Figura 3: Interface gráfica da ferramenta FINCA

A inserção dos dados de entrada nesta ferramenta pode ser realizada de duas formas distintas: (i) a definição do circuito elétrico a ser analisado pode ser escrita diretamente na interface gráfica, ou (ii) pode ser utilizado um arquivo texto, previamente criado,

contendo a definição do circuito a ser analisado.

Na definição do circuito elétrico, cada linha do texto representa um elemento (componente) e possui o seguinte formato:

elemento numeração nó1 nó2 inf sup

onde: (i) o campo **elemento** pode ser R (resistor), I (fonte de corrente independente) ou V (fonte de tensão independente), (ii) o campo **numeração** é um índice que identifica cada elemento, (iii) os campos **nó1** e **nó2** são os números dos nós terminais entre os quais o elemento está conectado, e (iv) os campos **inf** e **sup** representam os extremos inferior e superior do intervalo, respectivamente, que representa o valor do elemento. Este intervalo é útil na modelagem da tolerância existente em alguns elementos elétricos.

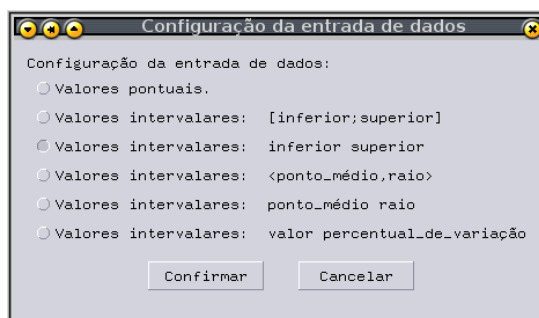


Figura 4: Interface de entrada de dados

A Figura 4 apresenta uma interface de configuração da entrada de dados, onde se define qual será o formato do intervalo, que representa o valor de cada elemento do circuito elétrico. Dependendo do perfil do usuário, os formatos utilizados podem variar. Por exemplo, um aluno do curso de Engenharia Elétrica, provavelmente, preferirá trabalhar com intervalos no formato **valor percentual_de_variação**.

A saída de dados do FINCA também pode ser configurada pelo usuário. Dentre as opções disponíveis estão: tensões nodais e correntes nos elementos, como pode ser visualizado na Figura 5.

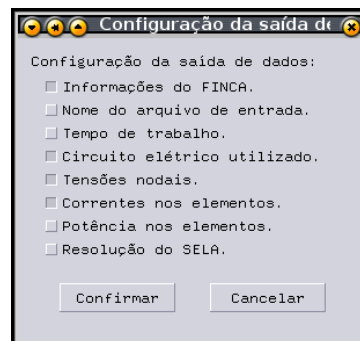


Figura 5: Interface de configuração da saída de dados

Esta saída pode ser salva em um arquivo texto.

Todos os resultados numéricos são apresentados na forma de intervalos.

A ferramenta FINCA oferece a opção de geração de relatórios sobre os circuitos analisados. Estes relatórios utilizam as informações contidas na saída de dados e geram documentos nos formatos HTML, PDF ou TXT. A interface gráfica de configuração dos relatórios a serem gerados pode ser visualizada na Figura 6. Um exemplo de relatório, no formato PDF, gerado pela ferramenta FINCA é apresentado na Figura 7.

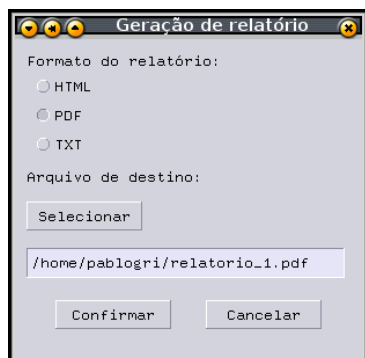


Figura 6: Interface de geração de relatório

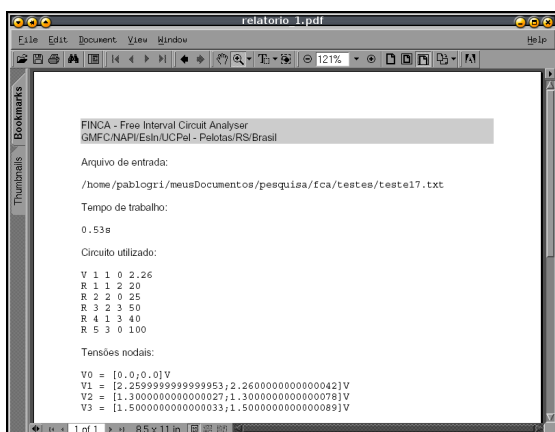


Figura 7: Exemplo de relatório gerado pela ferramenta

5 Exemplos de Aplicação

Para validar e testar o desempenho do software proposto, nesta seção serão apresentados resultados numéricos obtidos para a aplicação da ferramenta FINCA a dois circuitos elétricos teste.

A Figura 8 mostra o circuito elétrico para o primeiro teste. A Tabela 1 apresenta os valores dos resistores para o Teste 1. Nesta tabela, a coluna 2 (VN) refere-se ao valor nominal do resistor e a coluna 3, à tolerância especificada pelo fabricante. Os resultados indicados pela ferramenta FINCA estão apresentados na Tabela 2.

A Tabela 2 indica que a tensão no nó 2 e 3 devem se situar entre 1.93473 e 2.06527 V e 5.93473

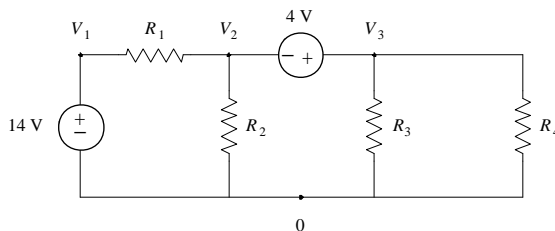


Figura 8: Teste 1 - Circuito elétrico teste

Resistor	VN	tol
1	4 Ω	10 %
2	2 Ω	10 %
3	12 Ω	10 %
4	4 Ω	10 %

Tabela 1: Teste 1 - Valores dos resistores

Entrada de Dados	Tensões Nodais
R 1 1 2 3.96 4.04	$V_0 = [0.0; 0.0] \text{ V}$
R 2 2 0 1.98 2.02	$V_1 = [14.0; 14.0] \text{ V}$
R 3 3 0 11.88 12.12	$V_2 = [1.93473; 2.06527] \text{ V}$
R 4 3 0 3.96 4.04	$V_3 = [5.93473; 6.06527] \text{ V}$
V 1 1 0 14	
V 2 3 2 4	

Tabela 2: Resultado da ferramenta FINCA - Teste 1

e 6.06527 V, respectivamente. A tensão no nó 1 é mantida fixa em 14 V pois, até o presente momento, está se considerando apenas a incerteza nos dados dos resistores. A Tabela 3 apresenta os resultados fornecidos pelo software comercial.

Entrada de Dados	Tensões Nodais
R 1 1 2 4	$V_0 = 0.0 \text{ V}$
R 2 2 0 2	$V_1 = 14.0 \text{ V}$
R 3 3 0 12	$V_2 = 2.0 \text{ V}$
R 4 3 0 4	$V_3 = 6.0 \text{ V}$
V 1 1 0 14	
V 2 3 2 4	

Tabela 3: Resultado para o Teste 1 - Software comercial

Comparando as Tabelas 2 e 3, observa-se que o resultado intervalar fornecido pela ferramenta FINCA encapsula o resultado pontual dado pelo software comercial. Dessa forma, pode-se depreender que, em termos de qualidade de solução, os resultados gerados pelo módulo intervalar são aceitáveis e automaticamente já oferecem uma análise do erro presente na solução.

O segundo circuito elétrico está mostrado na Figura 9. A Tabela 4 apresenta os valores dos resistores para o Teste 2. A aplicação do FINCA a este sistema-teste resultou nos valores apresentados na Tabela 5.

A análise da Tabela 5 revela que erros de 1% nos valores nominais das resistências componentes do

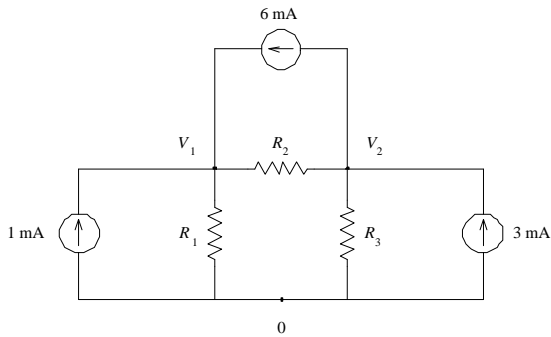


Figura 9: Teste 2 - Circuito elétrico teste

Resistor	VN	tol
1	6 k Ω	1 %
2	4 k Ω	1 %
3	2 k Ω	1 %

Tabela 4: Teste 2 - Valores dos resistores

Entrada de Dados	Tensões Nodais
R 1 1 0 5.94k 6.06k	V0 = [0.0;0.0] V
R 2 1 2 3.96k 4.04k	V1 = [17.69134;18.27228] V
R 3 2 0 1.98k 2.02k	V2 = [1.81476;2.18484] V
I 1 0 1 1m	
I 2 2 1 6m	
I 3 0 2 3m	

Tabela 5: Resultado da ferramenta FINCA - Teste 2

circuito elétrico afetam os valores das tensões nodais em, aproximadamente 2% para o nó 1 e de 9% para o nó 2. Os resultados fornecidos pelo software comercial estão apresentados na Tabela 6.

Entrada de Dados	Tensões Nodais
R 1 1 0 6k	V0 = 0.0 V
R 2 1 2 4k	V1 = 18.0 V
R 3 2 0 2k	V2 = 2.0 V
I 1 0 1 1m	
I 2 2 1 6m	
I 3 0 2 3m	

Tabela 6: Resultado do Teste 2 - Software comercial

De forma análoga ao Teste 1, neste teste também o software FINCA forneceu valores intervalares para as tensões nodais que encapsulam os resultados pontuais do software comercial. Isto reafirma novamente a qualidade dos resultados fornecidos.

6 Conclusões

Este trabalho apresentou um software para a análise de circuitos elétricos baseado na filosofia de software livre e na Matemática Intervalar. Este é capaz de automaticamente avaliar a influência das

tolerâncias dos valores nominais dos resistores sobre as tensões nodais do circuito elétrico.

A implementação foi realizada utilizando a linguagem Python, na qual se implementou uma biblioteca para a Matemática Intervalar.

Atualmente, os alunos do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Católica de Pelotas estão utilizando o software FINCA como parte da etapa de validação dos resultados fornecidos.

Como trabalhos futuros, pretende-se implementar outros tipos de elementos de circuito bem como o desenvolvimento de uma interface gráfica para a entrada dos dados referentes aos circuitos elétricos em análise.

Agradecimentos. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CTINFO/CNPq e FAPERGS.

Referências

- [1] L. V. Barboza e G. P. Dimuro, Por que o computador erra? Uma visão didática, em “XV CNMAC”, Uberlândia, 1992.
- [2] T. A. Diverio, “PASCAL XSC - Pascal para computação científica: descrição, instalação e aplicações”, UFRGS, Porto Alegre, 1994.
- [3] C. A. Hölbíg, “Métodos intervalares para a resolução de sistemas de equações lineares”, Dissert. Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 1996.
- [4] J. D. Irwin, “Análise de circuitos em engenharia”, Makron Books, São Paulo, 2001.
- [5] D. Johnson, J. Hilburn e J. Johnson, “Fundamentos de análise de circuitos elétricos”, Prentice-Hall, 1984.
- [6] R.B. Keafort and V. Kreinovich (eds), “Applications of interval computations”, Kluwer, Boston, 1996.
- [7] U. Kulisch and W.L. Miranker (eds), “A new approach to scientific computation”, Academic Press, New York, 1983.
- [8] U. Kulisch, Advanced arithmetic for the digital computer, design of arithmetic units, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 24 (1999).
- [9] R.E. Moore, “Methods and applications of interval analysis”, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [10] J. Nilsson e S. Riedel, “Circuitos elétricos”, LTC, São Paulo, 2001.
- [11] R. H. S. Reiser, “Uma introdução à álgebra linear computacional com ênfase aos métodos intervalares de resolução de sistemas de equações lineares algébricas”, Dissert. Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 1995.