

# Equações de advecção-difusão: propriedades e comportamento assintótico.

**Graciela Moro\***

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAP, UFRGS,  
91509-900, Porto Alegre, RS  
E-mail: gracimoro@mat.ufrgs.br,

**Paulo Ricardo de Ávila Zingano**

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Av. Bento Gonçalves, 9500  
91509-900, Porto Alegre, RS  
E-mail: zingano@mat.ufrgs.br.

Neste trabalho, examinamos em detalhe resultados recentes apresentados em [1], [2], [3], [4] sobre o comportamento de soluções para equações (escalares) de advecção-difusão não-lineares, da forma

$$u_t + \operatorname{div}(\mathbf{f}(u)) = \operatorname{div}(A(u)\nabla u), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in R^n, t > 0$$

correspondentes a estados iniciais  $u(\cdot, 0) \in L^1(R^n) \cap L^\infty(R^n)$ . Aqui,  $A(u)$  é uniformemente positiva definida para todos os valores de  $u$  em questão, e  $\mathbf{f}(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))$  dá o fluxo da variável conservada em cada direção coordenada, com  $A, \mathbf{f}$  suaves. Entre os vários resultados, tem-se em particular

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(R^n)} \sim \gamma_{p,n}(m)t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \quad \text{ao } t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

onde  $\gamma_{p,n}(m)$  é uma certa constante (positiva sempre que  $m \neq 0$ ) que depende de  $p, n, m$ . No caso  $p = 1$ , tem-se  $\gamma_{p,n}(m) = |m|$ , i.e.,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(R^n)} \longrightarrow |m| \quad \text{ao } t \rightarrow +\infty \quad (3)$$

onde  $m$  é a massa da solução. Além disso, sendo  $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t)$  um par qualquer de soluções com mesma massa, isto é,

$$\int_{R^n} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = \int_{R^n} \hat{u}(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \quad (4)$$

temos

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(R^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow +\infty \quad (5)$$

e também,

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^p(R^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow +\infty \quad (6)$$

para cada  $1 \leq p \leq \infty$ , uniformemente em  $p$ . Este fato está relacionado com a seguinte propriedade fundamental: as soluções  $u(\cdot, t)$  de (1) podem ser bem aproximadas ao  $t \rightarrow +\infty$  por soluções  $v(\cdot, t)$  de equações mais simples: quando  $n \geq 2$ , temos

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(R^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow +\infty \quad (7)$$

e, mais geralmente, para cada  $1 \leq p \leq \infty$ ,

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(R^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow +\infty \quad (8)$$

onde  $v(\cdot, t)$  é qualquer solução da equação *linear*

$$v_t + \operatorname{div}(\mathbf{v}'(0)) = \operatorname{div}(A(0)\nabla v) \quad (9)$$

tendo a mesma massa de  $u(\cdot, t)$ , e, no caso  $n = 1$ , o mesmo vale para  $v(\cdot, t)$  dada pela equação de Burgers

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = a(0)v_{xx}. \quad (10)$$

Intuitivamente podemos explicar este comportamento como segue: escrevendo (1) na forma

$$u_t + \mathbf{f}'(0) \cdot \nabla u + u\mathbf{f}''(0) \cdot \nabla u + \dots = \operatorname{div}(A(0)\nabla u) + \operatorname{div}(uA'(0)\nabla u) + \dots,$$

e, observando as taxas de decaimento de  $u(\cdot, t)$  e suas derivadas

$$\|\mathbf{f}'(0) \cdot \nabla u(\cdot, t)\|_{L^\infty(R^n)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\right) \quad (11)$$

$$\|u(\cdot, t)\mathbf{f}''(0) \cdot \nabla u(\cdot, t)\|_{L^\infty(R^n)} = O\left(t^{-n-\frac{1}{2}}\right) \quad (12)$$

$$\|\operatorname{div}(A(0)\nabla u)\|_{L^\infty(R^n)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}-1}\right) \quad (13)$$

$$\|\operatorname{div}(u(\cdot, t)A'(0)\nabla u)\|_{L^\infty(R^n)} = O\left(t^{-n-1}\right); \quad (14)$$

\*Trabalho financiado pela Capes

em particular, retendo o termo linear difusivo  $div(A(0)\nabla u)$  na equação, precisamos apenas manter o termo  $\mathbf{f}'(0) \cdot \nabla u$  no caso  $n \geq 2$ , visto que os demais termos tem tamanho insignificante perto de  $div(A(0)\nabla u)$ ; isso sugere a equação (9) acima. Quando  $n = 1$ , precisamos ainda manter o segundo termo na expansão do termo advectivo, visto que é da mesma ordem de  $a(0)u_{xx}$ ; isso nos dá a equação (10).

## Referências

- [1] P. R. Zingano, On bounded, integrable solutions of non-linear advection-diffusion equations, *Instituto de Matemática, UFRGS*, (1996).
- [2] P. R. Zingano, Nonlinear  $L^2$  stability under large disturbances, *J. Comp. Appl. Math.* 103 (1999) 207-219.
- [3] P. R. Zingano, Asymptotic behavior of the  $L^1$  norm of solutions to nonlinear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Anal.* 3(1) (2004) 151-159.
- [4] T. Hagstrom, J. Lorenz, P. Zingano, On finite energy solutions of advection-diffusion equations (submitted).