Existencia e Unicidade para um Sistema de EDP lineares em Domínio com Fronteira Móvel

Heleno da Silva Cunha*

CCEN - PPGME - UFPA

66075-110, Campus-Guamá, 01 - Belém, PA

E-mail: helenocunha@yahoo.com.br

ESMAC

Jorge Ferreira†

CCEN - PPGME - UFPA

66075-110, Campus-Guamá, 01 - Belém, PA

jf@ufpa.br

João dos Santos Protázio

ESMAC - Escola Superior Madre Celeste

67000-000, Estrada da Providência

E-mail: protazio@ufpa.br.

1 Apresentação do Problema

Neste trabalho, analisaremos a existência e unicidade de solução fraca do sistema abaixo:

$$\begin{cases} \rho_1(y,t)u_{tt} - \Delta u + \alpha(u-v) = f \text{ em } \tilde{Q}_T \\ \rho_2(y,t)v_{tt} - \Delta v - \alpha(u-v) = g \text{ em } \tilde{Q}_T \\ u = v = 0, \text{ em } \Gamma_0(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} + \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial v} + \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \text{ em } \Gamma_1 \end{cases} \tag{1}$$

Sendo $\tilde{Q}_T = \bigcup_{0\le t\le T} \Omega(t) \times \{t\} \subset \mathrm{I\!R^n} \times [0,\mathrm{T}]$, $\partial\Omega(t) = \Gamma_0(t) \cup \Gamma_1$ e $\rho_1, \rho_2 > d > 0$.

Como se pode observar, a fronteira do sistema está partida em duas partes, uma fixa e outra tempo-dependente.

2 Hipóteses sobre o Domínio

Definimos $\Sigma' := \bigcup_{0\le t\le T} \Gamma_0(t) \times \{t\}$ e $\Sigma := \Gamma_1 \times [0,T]$. O conjunto Σ' será considerado uma hiperfície n-dimencional suave. Se $(y,t) \in \Sigma'$, denotaremos por $v(y,t) = (v_y, v_t)$ a normal exterior a Σ' no ponto (y,t). E assumiremos que Σ' é uma "time-like", isto é:

$$|v_t| < |v_y|, \ \forall\ (v_y, v_t) \in \Sigma'$$

Vamos supor que existem abertos $\Omega_0(t)$ e Ω tais que:

$$\partial\Omega_0(t) = \Gamma_0(t); \tag{2}$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1; \tag{3}$$

$$\Omega(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_0(t)}; \tag{4}$$

$$\overline{\Omega_0(t)} \cap \Gamma_1 = \emptyset; \tag{5}$$

$$d(\Sigma', \Sigma) > 0. \tag{6}$$

Ainda não dissemos à quais espaços funcionais pertencem as funções do sistema, isto porque deve-se tomar uma certo cuidado, pois o domínio é variável. Nesse sentido o lema abaixo é de muita valia.

Lema 1 *Fixado $T > 0$, seja $t \in [0,T]$. Então, existem $\alpha(T) > 0$, um intervalo $[t_1, t_2]$ contendo t, com $t_2 - t_1 = \alpha(T)$, e um domínio aberto $\mathcal{O}_t \neq \emptyset$ tais que:*

$$\mathcal{O}_t \subset \bigcap_{t_1 \le \tau \le t_2} \Omega_0(\tau).$$

O lema nos informa que é possível colocar um cilindro de altura 2α, contendo $t \in [0,T]$ "no interior de Σ'". Fica dessa forma bem definida a desigualdade de Poincaré- Friendrichs tempo dependente:

$$|v|_{L(\Omega_0(t))} \le c[\int_{\Omega_0(t)} |\nabla v|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

Dada a desigualdade acima temos nos espaços de Sobolev tempo-dependentes:

$$H_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t)) := \{v \in H^1(\Omega(t)) \mid v = 0, \text{ em } \Gamma_0(t)\}$$

e sua respectiva norma:

$$[\int_{\Omega_0(t)} |\nabla v|^2 dx]^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $H_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))$ extende-se continuamente ao espaço $H^1(\Omega)$, basta por $v = 0$, no interior de $\Omega_0(t)$, $\forall v \in H_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))$.

*Aluno do PPGME/UFPA

†Orientador de dissertação de mestrado

Temos ainda os seguintes espaços de Hilbert:

$$L^2(0,T;H_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))); \tag{7}$$
$$L^2(0,T;L^2(\Omega(t))). \tag{8}$$

E suas respctivas normas:

$$[\int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla v|^2 dxdt]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$
$$[\int_0^T \int_{\Omega(t)} |v|^2 dxdt]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

3 Formulção Fraca do Problema

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \rho_1(y)u_{tt} - \Delta u + \alpha(u-v) = f \text{ em } \tilde{Q}_T \\ \rho_2(y)v_{tt} - \Delta v - \alpha(u-v) = g \text{ em } \tilde{Q}_T \\ \\ u = v = 0, \text{ em } \Gamma_0(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} + \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial v} + \dfrac{1}{\zeta}\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \text{ em } \Gamma_1 \\ \\ u(y,0) = u_0(y) \text{ e } \dfrac{du}{dt}(y,0) = u_1(y) \\ v(y,0) = v_0(y) \text{ e } \dfrac{du}{dt}(y,0) = v_1(y) \end{cases} \tag{11}$$

sendo

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in H^1_{\Gamma_0(0)}(\Omega(0)); \\ u_1, v_1 \in L^2(\Omega(0)); \\ \rho_1, \rho_2 \in W^{1,\infty}(\Omega(t)) \text{ e } \rho_1, \rho_2 > d > 0; \\ f, g \in L^2(0,T;L^2(\Omega(t))). \end{cases} \tag{12}$$

Defini-se a solução fraca do problema acima como sendo o par ordenado de funções (u,v) tal que:

$$\begin{cases} (u, \dfrac{\partial u}{\partial t}) \in L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))) \times L^2(0,T;L^2(\Omega(t))), \\ (v, \dfrac{\partial v}{\partial t}) \in L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))) \times L^2(0,T;L^2(\Omega(t))), \\ u(y,0) = u_0 \text{ e } v(y,0) = u_0 \end{cases} \tag{13}$$

e verifica as identidades:

$$\int_{\Omega(s)} u_1\rho_1(0)\varphi_1(0)ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} u_t(\rho_1\varphi_1)_t dsdt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla u \nabla \varphi dsdt + \frac{1}{\zeta}\int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi_1 d\sigma dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u-v)\varphi_1 dsdt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} f\varphi_1 dsdt. \tag{14}$$

$$\int_{\Omega(s)} v_1\rho_2(0)\varphi_2(0)ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} v_t(\rho_2\varphi_2)_t dsdt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla v \nabla \varphi_2 dsdt + \frac{1}{\zeta}\int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial t}\varphi_2 d\sigma dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u-v)\varphi_2 dsdt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} g\varphi_2 dsdt. \tag{15}$$

para quaiquer funções $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t)))$ tal que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))$ e $\varphi(T) = 0$.

O método de solução consiste em transformar o domínio não cilindrico $\widetilde{Q}_T$ em um outro cilincrico Q_T através de um difeomorfismo conveniente. Faz-se as mudanças de variáveis, resolve-se o sistema em Q_T e resgata-se a solução do sitema em $\widetilde{Q}_T$. A técnica para exibir o difeomorfismo encontra-se no âmbito da `topologia diferencial`; o conceito de isotopia e difeotopia são a bases para a existência do difeomorfismo. Para um estudo detalhado indicamos a referência [5]

4 Existência do difeomorfismo e mudança de variável

Definição 1 *Um difeomorfismo* $\Psi : \overline{\widetilde{Q}}_T \rightarrow \overline{Q}_T$, *dado por* $\Psi(y,t) = (\psi(y,t),t) = (\psi_1(y,t),...,\psi_n(y,t),t)$ *é dito hiperbólico quando a matriz abaixo simétrica positiva.*

$$A = (\frac{\partial \psi_t}{\partial y})(\frac{\partial \psi_t}{\partial y})^T - (\frac{\partial \psi_t}{\partial t})(\frac{\partial \psi_t}{\partial t})^T.$$

Observe que:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{bmatrix}^T$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \; a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\frac{\partial \psi_j}{\partial t}$$

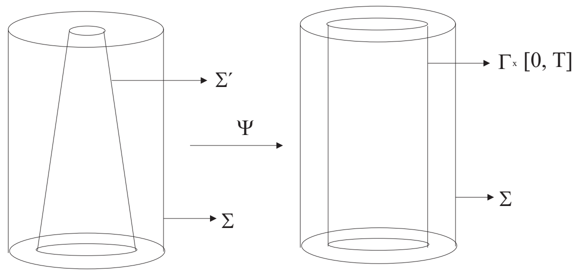
O teorema abaixo estabelece a existência do difeomorfismo.

Teorema 1 *Existe uma difeomorfismo* $\Phi : \overline{\Omega(0)} \times [0,T] \rightarrow \overline{\widetilde{Q}}_T$ *que preserva a variável tempo tal que:*

- $\Phi = Id$, *em* $\overline{\Omega_0(0)} \times [0,T]$ *e numa vizinhança de* Σ;

- $|\frac{d\phi}{dt}(y,t)| \leq \beta < 1$, $\forall (x,t) \in \Omega(0) \times [0,T]$;
- $\Psi = \Phi^{-1}$ *é hiperbólico;*

Um dos possíveis modelos do domínio $\widetilde{Q}_T$ sendo transformado, pelo difeomorfismo Ψ, no domínio Q_T está ilusrado na figura abaixo. Deve-se levar em conta que $\widetilde{Q}_T$ é "time-like"e isso sugere uma das possíbilidades de sua geometria.



De posse do difeomorfismo Ψ faremos as seguinte mudanças de variáveis:

- $(x,t) = \Psi(y,t)$;
- $w(x,t) = u \circ \Psi^{-1}(y,t)$ e $z(x,t) = u \circ \Psi^{-1}(y,t)$,
- $\widetilde{f}(x,t) = f \circ \Psi^{-1}(y,t)$ e $\widetilde{g}(x,t) = g \circ \Psi^{-1}(y,t)$,
- $\sigma_1(x,t) = \rho_1 \circ \Psi^{-1}(y,t)$ e $\sigma_2(x,t) = \rho_2 \circ \Psi^{-1}(y,t)$

O sistema (11) se reescreve da seguinte forma:

$$\begin{cases} \sigma_1 w_{tt} + \widetilde{a}_1(x,t,D)w_t + \widetilde{a}_2(x,t,D)w + \\ \alpha(w-z) = \widetilde{f}, \text{ em } Q_T \\ \\ \sigma_2 z_{tt} + \widetilde{a}_1(x,t,D)z_t + \widehat{a}_2(x,t,D)z - \\ \alpha(w-z) = \widetilde{g}, \text{ em } Q_T \\ \\ w = z = 0 \text{ em } \Sigma' \\ \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \upsilon} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial w}{\partial t} = \sigma_2 \frac{\partial z}{\partial \upsilon} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \text{ em}\Sigma \\ \\ w(x,0) = w_0 \text{ e } \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1 \\ z(x,0) = z_0 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z_1 \end{cases} \tag{16}$$

Sendo:

$$\widetilde{a}_1(x,t,D) = 2\sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i(x,t);$$

$$\widehat{a}_1(x,t,D) = 2\sigma_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i(x,t).$$

$$h_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_2(x,t,D) = & -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{a}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}) + \\ & \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}; \\ \widetilde{a}_2(x,t,D) = & -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\widehat{a}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}) + \\ & \sum_{i=1}^{n} \widehat{b}_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

$$\widetilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\frac{\partial \psi_j}{\partial t};$$
$$\widehat{a}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \sigma_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\frac{\partial \psi_j}{\partial t}.$$

$$\widetilde{b}_i(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{a}_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t};$$
$$\widehat{b}_i(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widehat{a}_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}.$$

Os operadores $\widetilde{a}_2$ e $\widehat{a}_2$ possuem as seguintes propriedades:

1. $\widetilde{a}_{ij} = \widetilde{a}_{ji}$ e $\widehat{a}_{ij} = \widehat{a}_{ji}$;
2. $\widetilde{a}_{ij} = \sigma_1$ e $\widehat{a}_{ij} = \sigma_2$, em uma vizinhança de Σ;
3. existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}\xi_1\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ e $\sum_{i,j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}\xi_1\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, para todo $(x,t) \in \overline{Q}_T$.

5 Existência e unicidade do sistema em domínio fixo

Define-se como solução do problema (16) ao par ordenado de funções (w,z) tal que:

$$\begin{aligned} & (w, \frac{\partial w}{\partial t}) \in L^2(0,T,V) \times L^2(0,T,H); \\ & (z, \frac{\partial z}{\partial t}) \in L^2(0,T,V) \times L^2(0,T,H); \\ & w(x,0) = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1; \\ & z(x,0) = z_0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = z_1. \end{aligned}$$

e satisfazem às identidades:

$$\int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt}\varphi_1 ds - 2\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i \varphi_1}{\partial x_i} w_t ds +$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega(0)}\widetilde{a}_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}+\frac{1}{\zeta}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial w}{\partial t}\varphi_1 d\theta+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(0)}\frac{\partial w}{\partial x_i}\widetilde{b}_i\varphi_1 ds+\alpha\int_{\Omega(0)}(w-x)\varphi_1 ds=$$
$$\int_{\Omega(0)}\widetilde{f}\varphi_1 ds$$

$$\int_{\Omega(0)}\sigma_2 z_{tt}\varphi_2 ds-2\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(0)}\frac{\partial h_i\sigma_2\varphi_2}{\partial x_i}z_t ds+$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega(0)}\widehat{a}_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}+\frac{1}{\zeta}\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial z}{\partial t}\varphi_2 d\theta+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(0)}\frac{\partial z}{\partial x_i}\widehat{b}_i\varphi_2 ds+\alpha\int_{\Omega(0)}(w-x)\varphi_2 ds=$$
$$\int_{\Omega(0)}\widetilde{f}\varphi_2 ds$$

para quaisquer funções $\varphi_1,\varphi_2\in H^1_{\Gamma_0(0)}(\Omega(0))$.

Agora estamos em condições de enunciar um dos mais importantes teoremas deste trabalho.

Definindo $V=H^1_{\Gamma_0(0)}(\Omega(0))$ e $H=L^2(\Omega(0))$, temos:

Teorema 2 *Sejam $(w_0,w_1),(z_0,z_1)$ pertencentes ao espaço $V\times H$ e $\widetilde{f},\widetilde{g}$ pertencentes ao espaço $L^2(0,T;H)$. Então, o sistema (16) admite solução única (w,z) tal que:*

$$(w,\frac{\partial w}{\partial t})\in C(0,T;V)\times C(0,T;H);$$
$$(w,\frac{\partial w}{\partial t})\in C(0,T;V)\times C(0,T;H;)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}|_{\Gamma_1},\frac{\partial z}{\partial t}|_{\Gamma_1}\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

6 Retorno ao sistema em domínio móvel: Existência e Unicidade de Solução

De posse da solução do sistema em domínio fixo, podemos resgatar via o difeomorfismo inverso a solução do sistema no domínio móvel. Para isso precisamos do lema abaixo.

Lema 2 *A aplicação $I_\Phi : L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t)))\to L^2(0,T;V)$, dada por $I_\Phi(u)=u\circ\Phi$ é um isomorfismo linear e seu inverso é $I_\Psi : L^2(0,T;V)\to L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t)))$, dada por $I_\Psi(w)=w\circ\Psi$. A aplicação $J_\Phi : L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))\to L^2(0,T;H)$, dada por $J_\Phi(u)=u\circ\Phi$ é um isomorfismo linear e sua inversa é a aplicação $J_\Psi : L^2(0,T;H)\to L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))$, dada por $J_\Psi(w)=w\circ\Psi$*

Teorema 3 *Suponha que $u_0,v_0\in H^1_{\Gamma_0(0)(\Omega(0))}$ e qua $f,g\in L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))$. Então, o sistema (11) admite uma única solução (u,v) tal que:*

$$u,v\in L^2(0,T;H^1_(\Gamma_0(t)(\Omega(t))),$$
$$\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega(t)))$$

.

e a aplicação

$$(u_0,v_0,u_1,v_1,f,g)\mapsto(u,v,\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt},\frac{du}{dt}|_{\Gamma_1},\frac{dv}{dt}|_{\Gamma_1})$$

de

$$(H^1_{\Gamma_0(0)}(\Omega(0)))^2\times(L^2(\Omega(0)))^2\times(L^2(0,T;L^2(\Omega(t))))^2$$

em

$$(L^2(0,T;H^1_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))))^2\times(L^2(0,T;L^2(\Omega(t))))^2\times(L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

é linear e contínua.

7 Considerações Iniciais

Estamos estudando a questão da existência e unicidade de solução fraca, bem como a regularidade escondida no bordo, considerando uma função não-linear $h(u-v)$ no lugar de $\alpha(u-v)$. Pretende-se apresentar o referido artigo no próximo CNMAC.

Referências

[1] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des prolémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.

[2] C. Bardos and J. Cooper, *A noliear wave equation in a time dependent domain.* J. Math. Anal. Appl.42 (1973),29-60.

[3] J. Cooper, *Local decay of solutions of the wave equation in the exterior of a moving body.* J. Math Anal. Appl. 49 (1975), 130-153.

[4] M. W. Hirsch, *Differential Topology.* Springer-Verlag, Berlin, 1976

[5] J. Cooper and W. Strauss *The initial boundary problem for the Maxwell equation in the presence of a moving body*, SIAM J. Math. Anal. 16 (1984) 1165-1179

[6] J. Ferreira and N.A. Lar'kin *Global solvability of a mixed problem foa a nonlinear hyperbolic-parabolic equation i noncylindrical domais*, Portugale Mathematica. 53-fasc. 4 (1996)