Um Método Previsor-Corretor para o Problema de Eliminação de Ruídos em Imagens Digitais

Heloisa H.M. Silva, **Karina Miranda D'Ippólito**

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,

15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: hsilva@ibilce.unesp.br, karinadippolito@gmail.com.

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre a aplicação de um método numérico do tipo Previsor-Corretor à uma equação diferencial parcial que representa o problema de eliminação de ruídos em imagens digitais. Muitos modelos matemáticos para restauração de imagens têm sido propostos ao longo dos últimos anos. Citamos, em particular, [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9]. Recentemente, Barcelos, Boaventura e Silva Jr. [5] propuseram um novo modelo de difusão anisotrópica não linear, dado pela equação:

$$u_t = g|\nabla u|\, div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) - \lambda(1-g)(u-I), \qquad (1)$$

$$u(x,y,0) = I(x,y),\ x \in \Omega,\ t > 0,$$

onde $g = g(|G_\sigma * \nabla u|)$ $I(x,y)$ representa a imagem original com ruído, $u(x,y,t)$ é sua versão suavizada na escala $''t''$, σ e λ são parâmetros, G_σ é um núcleo de convolução (aqui, uma função gaussiana), e $G_\sigma * \nabla u$ é a estimativa local de ∇u usada para a eliminação de ruídos. A função $g(s) \geq 0$ é uma função não crescente, e satisfaz $g(0) = 1$ e $g(s) \to 0$ quando $s \to \infty$.

O lado direito da equação (1) é composto por duas partes. A primeira representa o termo de difusão, proposto por Alvarez, Lions e Morel [2], que permite a retirada de ruídos da imagem inicial $I(x,y)$. A segunda parte da equação (1) é composta pelo termo forçante $(u - I)$, sugerido por Nordström [8], que tem a propriedade de manter $u(x,y,t)$ próxima à imagem inicial $I(x,y)$, multiplicado pelo termo regularizador $(1-g)$, denominado seletor de moderação. Esta parcela de (1) age de forma seletiva recuperando as características iniciais da imagem $I(x,y)$ com mais intensidade nas regiões de fronteira, visto que nessas regiões $g \approx 0$. Por outro lado, nas regiões homogêneas, $g \approx 1$ e, consequentemente, o termo forçante será inexpressivo, o que possibilita uma melhor suavização da imagem.

Resultados experimentais [5] obtidos com a aplicação do modelo descrito acima em imagens sintéticas, médicas e da vida real mostraram sua eficiência produzindo imagens com alta qualidade de segmentação e eficiente suavização.

Vamos, agora, descrever o processo de solução da equação (1) que é também utilizado, de um modo geral, para outros modelos baseados em equações diferenciais parciais.

Se denotarmos

$$\ell(u) = g|\nabla u| div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) - \lambda(1-g)(u-I),$$

podemos escrever a equação (1) na forma

$$u_t = \ell(u), \qquad (2)$$

com $u(x,y,0) = I(x,y)$. A solução deste problema é encontrada substituindo-se as derivadas presentes em $\ell(u)$ por diferenças finitas (ver [2], [4], [7] e [9]). A equação diferencial é então aproximada, em uma malha regular com incremento espacial $h = \triangle x = \triangle y$, pela equação de diferenças

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \triangle t\, \ell(u_{i,j}^{n}), \qquad (3)$$

com $u_{i,j}^0 = I(x_i, y_j)$, onde $\triangle t$ é o incremento temporal e $u_{i,j}^n$ é a solução aproximada de $u(x_i, y_j)$ no tempo t_n. Este é um método bastante simples, mas pouco preciso.

Apresentamos, aqui, o método conhecido como método de Euler implícito para a solução de (2), que foi implementado usando um esquema Previsor-Corretor, onde o previsor é o método de Euler. Então, a equação de diferenças é dada por

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \triangle t\, \ell(u_{i,j}^{n+1,\nu+1}), \qquad (4)$$

com

$$u_{i,j}^{n+1,\nu+1} = u_{i,j}^{n} + \triangle t\, \ell(u_{i,j}^{n+1,\nu}),\ \nu = 0, 1, \ldots, \mu - 1,$$

onde μ é o número de iterações do corretor. Na prática, tomamos $\mu = 1$.

Observamos, através de resultados experimentais em imagens sintéticas, que o algoritmo do par Previsor-Corretor mostrou-se mais eficiente na restauração das imagens.

Apresentamos, em seguida, um estudo sobre a estabilidade do método (4) que baseia-se no resultado apresentado por Alvarez e Esclarin [1].

Seja θ tal que $\xi = (-\,sen\,\theta, \cos\theta)$, onde ξ denota a direção ortogonal a ∇u. Então, podemos tomar $\nabla u/|\nabla u| = (\cos\theta, sen\,\theta)$ e, assim,

$u_x = \sqrt{u_x^2+u_y^2}\cos\theta$ e $u_y = \sqrt{u_x^2+u_y^2}\, sen\,\theta$. Substituindo-se estes dois termos no termo de difusão de (1),

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &= |\nabla u|\, div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \\ &= \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2+u_y^2}, \end{aligned} \qquad (5)$$

obtemos

$$u_{\xi\xi} = sen^2\theta\, u_{xx} - 2\, sen\,\theta\,\cos\theta\, u_{xy} + \cos^2\theta\, u_{yy}.$$

Aproximando as derivadas u_{xx}, u_{yy} e u_{xy} por diferenças finitas ([6]) temos:

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} &= -2u_{ij} + sen^2\theta u_{i+1,j} + sen^2\theta u_{i-1,j} \\ &\quad + \cos^2\theta u_{i,j+1} + \cos^2\theta u_{i,j-1} \\ &\quad - \frac{1}{2}\, sen\,\theta\cos\theta u_{i+1,j+1} - \frac{1}{2}\, sen\,\theta\cos\theta u_{i-1,j-1} \\ &\quad + \frac{1}{2}\, sen\,\theta\cos\theta u_{i-1,j+1} + \frac{1}{2}\, sen\,\theta\cos\theta u_{i+1,j-1} \\ &= \sum_{k,l=-1}^{1} \lambda_{k,l}\, u_{i+k,j+l}. \end{aligned}$$

Desta forma, o esquema numérico para o modelo (1) é da forma

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \triangle t\, \ell(\bar{u}_{i,j}), \qquad (6) \\ \ell(\bar{u}_{i,j}) &= g(\bar{u}_{i,j}) \sum_{k,l=-1}^{1} \lambda_{k,l}\bar{u}_{i+k,j+l} \\ &\quad + f(\bar{u}_{i,j}) \end{aligned}$$

com $f(\bar{u}_{i,j}) = -\lambda(1 - g(\bar{u}_{i,j}))(\bar{u}_{i,j} - I_{i,j})$ e $\bar{u}_{i,j} = u_{i,j}^{n+1,\nu+1}$ definido em (4).

Teorema Consideremos o esquema (6) tal que $|f(u_{i,j})| \leq C$ se $u_{i,j} \in [-b,b]$. Então, $\forall M > b$, temos que para valores pequenos de $\triangle t$,

$$\text{se} \quad \forall\, i,j, \quad |u_{i,j}| < M \Rightarrow |u_{i,j}^{n+1}| \leq M.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} |u_{i,j}^{n+1}| &= |u_{i,j}^n + \triangle t g(\bar{u}_{i,j}) \sum_{k,l=-1}^{1} \lambda_{k,l}\bar{u}_{i+k,j+l} \\ &\quad + \triangle t f(\bar{u}_{i,j})| \\ &< b + \triangle t g(\bar{u}_{i,j}) \sum_{k,l=-1}^{1} |\lambda_{k,l}| M + C\,\triangle t \end{aligned}$$

Supondo que a última expressão seja menor que M, temos

$$b + C\,\triangle t < M\left[1 - g(\bar{u}_{i,j})\,\triangle t \sum_{k,l=-1}^{1} |\lambda_{k,l}|\right]. \qquad (7)$$

Dividindo (7) por $\left[1 - g(\bar{u}_{i,j})\,\triangle t \sum_{k,l=-1}^{1} |\lambda_{k,l}|\right]$, obtemos

$$\frac{b + C\,\triangle t}{\left[1 - g(\bar{u}_{i,j})\,\triangle t \sum_{k,l=-1}^{1} |\lambda_{k,l}|\right]} < M. \qquad (8)$$

Agora, temos que quando $\triangle t \to 0$, $b \leq M$. Logo, se $\triangle t$ é suficientemente pequeno para a desigualdade (8) ser verdadeira, então $|u_{i,j}^{n+1}| \leq M$.

O resultado acima mostra que o esquema numérico (4) é L^∞-estável.

O método (4) foi implementado e testado em várias imagens sintéticas e imagens do cotidiano e os resultados foram comparados aos obtidos pelo método de Euler (3). As imagens originais utilizadas são representadas por matrizes de dimensão 256×256 e 256 gradações de cinza. Para a comparação entre os métodos, calculamos o erro médio, e_m, que é dado pela expressão

$$e_m = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |u_{i,j}^n - u_{i,j}^*|}{(m+1)\times(m+1)},$$

onde $m = 255$, $u_{i,j}^n$ é a imagem restaurada e $u_{i,j}^*$ é a imagem original (sem ruído).

Para todas as imagens sintéticas testadas, o erro médio obtido pelo método de Euler implícito foi menor que o de Euler. Entretanto, o mesmo não ocorreu para as imagens reais. Também, da visualização gráfica, é possível notar uma melhora na qualidade das imagens sintéticas obtidas pelo método de Euler implícito, mas que é mais difícil de verificar para as imagens reais.

Gostaríamos de finalizar este trabalho, mencionando que nosso objetivo foi o de verificar o comportamento de diferentes métodos numéricos aplicados à resolução do problema (1), que representa a eliminação de ruídos em imagens digitais e que muito estudo necessita ainda ser feito para tirarmos conclusões mais precisas.

Referências

[1] L. Alvarez & J. Esclarín, Image quantization using reaction-diffusion equation, *SIAM J. Appl. Math.*, 57 (1997), 490-506.

[2] L. Alvarez, P. L. Lions & J. M. Morel, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 (1992), 845-866.

[3] G. Aubert and L. Vese, A variational method in image recovery, *SIAM J. Numer. Anal.*, 34 (1997), 1948-1979.

[4] C. A. Z. Barcelos, Y. Chen, Heat flows and related minimization problem in image restoration, *Comput. Math. Applicat.*, 39 (200), 81-97.

[5] C. A. Z. Barcelos, M. Boaventura and E. C. Silva Jr., A well-balanced flow equation for noise removal and edge detection, *IEEE Transactions on Image Processing*, 12 (2003), 751-763.

[6] K. M. D'Ippólito, Estudo de Métodos Numéricos para Eliminação de Ruídos em Imagens Digitais, Dissertação de Mestrado, Departamento de Ciências de Computação e Estatística, UNESP, São José do Rio Preto, 2005.

[7] J. Malik and P. Perona, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 12 (1990), 629-639.

[8] K.N. Nordström, Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection, *Image Vis. Comput.*, 8 (1990), 318-327.

[9] L. Rudin, S. Oscher & E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, 60 (1992), 259-268.