Controle Biológico de Mosquito *Aedes aegypti*[*]

Hyun Mo Yang

Depto. de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP e Lab-Epifisma

Caixa Postal 6065, CEP: 13083-970, Campinas, SP

E-mail: hyunyang@ime.unicamp.br,

Lourdes Esteva

Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM e Lab-Epifisma

04510, México, D.F., México

E-mail: lesteva@lya.fciencias.unam.mx.

1 Introduction

Uma forma de controlar insetos causadores de pragas e doenças é alterar o processo de reprodução liberando insetos estéreis [16]. Insetos esterilizados são liberados no ambiente natural, de modo a resultar em um pareamento que resulte na inviabilização de ovos, podendo assim levar para a extinção do inseto [7].

A técnica de liberação de insetos machos estéreis foi utilizada com sucesso em Flórida, USA, para controlar mosca varejeira (*Cochliomya omnivorax*) em 1958 [17, 18]. Foram liberados em um período de 18 meses um total de 2 bilhões, custando algo como $US10.000.000,00$ [7].

Fatores que devem ser considerados na liberação de insetos estéreis são: competitividade dos insetos estéreis na fertilização, liberação em número insuficiente, forma de liberação inadequada, etc. [3, 4, 6, 10, 13, 19, 20, 21]. Pode-se combinar com uso de inseticidas [1], liberação de outros parasitóides [5, 15] ou insetos geneticamente modificados [9].

Estuda-se aplicação de técnica de liberação de mosquitos *Aedes aegypti*, que é transmissor de dengue e febre amarela, cujo controle é dificultado por ter ciclo de vida complexo [2]. Considera-se um modelo em que se considera taxa de recrutamento constante e dependente da densidade.

2 Modelo

Para avaliar controle biológico de mosquito transmissor de dengue, divide-se o ciclo de vida em fase imatura (ovo, larva e pupa) e fase adulta. Denota-se por A quantidade da população na fase aquática (imatura) em um instante de tempo t. Para fase adulta, considera-se os compartimentos: fêmeas não-acasaladas, I; fêmeas fertilizadas, F; fêmeas não-férteis após acasalamento, U; e insetos machos, M. A população de machos estéreis em tempo t é denotada por M_T.

As taxas de mortalidade percapita da forma imatura, fêmeas não-acasaladas, fêmeas acasaladas férteis, e não-férteis, machos naturais e estéreis são designadas por μ_A, μ_I, μ_F, μ_U, μ_M e μ_T, respectivamente.

A taxa global de oviposição de fêmeas fertilizadas é proporcional à sua densidade, mas regulada por limitação do meio. Assume-se que esta taxa é dada por $\phi\left(1-\dfrac{A}{C}\right)$, onde C é a capacidde do meio, e ϕ é a taxa de oviposição intrínseca. A fase aquática transforma-se em mosquito adulto a uma taxa γ; onde uma proporção r são fêmeas e $1-r$, machos.

Aplicando-se a lei da ação das massas, a probabilidade de encontro de uma fêmea com macho natural é dada por $\dfrac{M}{M+M_T}$, sendo que a taxa percapita de fertilização de fêmeas é dada por $\dfrac{\beta M}{M+M_T}$, onde β é a taxa de acasalamento. De modo análogo, as fêmeas têm probabilidade de encontro com machos estéreis $\dfrac{pM_T}{M+M_T}$, onde o parâmetro p, com $0 \leq p \leq 1$, é a probabilidade de machos estéreis sejam de fato introduzidos nas proximidades dos criadouros. Supondo que a taxa de acasalamento também é diminuído por $q\beta$, com $0 \leq q \leq 1$, então tem-se $\dfrac{\beta_T M_T}{M+M_T}$, onde $\beta_T = pq\beta$. O parâmetro p está relacionado com a efetividade de introdução do mosquito estéril, enquanto q representa modificações fisiológicas resultante de método de esterilização.

2.1 Recrutamento Constante de Machos Estéreis

Assume-se que os machos estéreis são introduzidos a uma taxa constante α. Neste caso, tem-se o modelo descrito por

[*]Apoio financeiro CNPq (Edital Universal) e FAPESP (Projeto Temaático)

$$
\begin{aligned}
A' &= \phi\left(1-\frac{A}{C}\right)F-(\gamma+\mu_A)A \\
I' &= r\gamma A-\frac{\beta MI}{M+M_T}-\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-\mu_I I \\
F' &= \frac{\beta MI}{M+M_T}-\mu_F F \qquad (1)\\
M' &= (1-r)\gamma A-\mu_M M \\
M'_T &= \alpha-\mu_T M_T,
\end{aligned}
$$

e as fêmeas não férteis, desacoplado do sistema, são descritas por

$$
U'=\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-\mu_U U.
$$

2.1.1 Pontos de Equilíbrio

A população de machos estéreis aproxima do equilíbrio $\frac{\alpha}{\mu_T}$. Então o sistem (1) tem equilíbrio trivial dado por $P_2=(0,0,0,0,\frac{\alpha}{\mu_T})$, com $\bar{U}=0$, em que só existe machos estéreis. O equilíbrio não-trivial é dado por $(\bar{A},\bar{I},\bar{F},\bar{M},\frac{\alpha}{\mu_T})$ satisfazendo as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
\bar{I} &= \frac{r\gamma\bar{A}\left(\bar{M}+\frac{\alpha}{\mu_T}\right)}{(\mu_I+\beta)\bar{M}+(\mu_I+\beta_T)\frac{\alpha}{\mu_T}} \\
\bar{F} &= \frac{(\gamma+\mu_A)C\bar{A}}{\phi(C-\bar{A})} \qquad (2)\\
\bar{M} &= \frac{(1-r)\gamma\bar{A}}{\mu_M},
\end{aligned}
$$

onde $\bar{A}$ é a solução de equação de segundo grau

$$
p(A)=aA^2+bA+c=0, \qquad (3)
$$

com coeficientes

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{C}\frac{\phi r\gamma\beta}{(\gamma+\mu_A)(\beta+\mu_I)\mu_F} \\
b &= 1-\frac{\phi r\gamma\beta}{(\gamma+\mu_A)(\beta+\mu_I)\mu_F} \\
c &= \frac{(\beta_T+\mu_I)\mu_M\alpha}{(\beta+\mu_I)(1-r)\gamma\mu_T}.
\end{aligned}
$$

As fêmeas estéreis são dadas por

$$
\bar{U}=\frac{\alpha\beta_T\bar{I}}{\mu_U(\mu_T\bar{M}+\alpha)}.
$$

De $\bar{F}$ nota-se que soluções positivas devem satisfazer $0<\bar{A}<C$. E nos extremos deve-se ter

$$
\begin{aligned}
p(0) &= c>0 \\
p(C) &= C+c>0 \\
\frac{dp}{dA}(C) &= \frac{\phi r\gamma\beta}{(\mu_A+\gamma)(\beta+\mu_I)\mu_F}+1>0.
\end{aligned}
$$

Segue-se que $p(A)$ tem uma ou duas raízes no intervalo $(0,C)$ se e somente se (i) $\frac{dp}{dA}(0)<0$ e (ii) $b^2-4ac>0$. Define-se

$$
R=\frac{\phi r\gamma\beta}{(\mu_A+\gamma)(\beta+\mu_I)\mu_F} \qquad (4)
$$

e

$$
S=\frac{(\beta_T+\mu_I)\mu_M\alpha}{(\beta+\mu_I)(1-r)\gamma C\mu_T}. \qquad (5)
$$

Então equação (3) pode ser escrita como

$$
p(A)=\frac{R}{C}A^2-(R-1)A+CS=0, \qquad (6)
$$

e as condições para existência biológica do equilíbrio não-trivial são

$$
R>1 \qquad (7)
$$

e

$$
\frac{(R-1)^2}{4RS}\geq 1. \qquad (8)
$$

Quando ambas as condições são satisfeitas, tem-se

$$
\bar{A}_-=\frac{(R-1)}{2R}C\left[1-\sqrt{1-\frac{4RS}{(R-1)^2}}\right] \qquad (9)
$$

e

$$
\bar{A}_+=\frac{(R-1)}{2R}C\left[1+\sqrt{1-\frac{4RS}{(R-1)^2}}\right]. \qquad (10)
$$

Logo, sob as condições (7) e (8), sistema (1) tem duas soluções P_{3-} e P_{3+}, correspondendo a $\bar{A}_-$ e $\bar{A}_+$. No caso de igualdade em (8), P_{3-} e P_{3+} colapsam para um equilíbio P_3 com $\bar{A}=\frac{(R-1)}{2R}C$, de onde obtém-se o valor máximo R^* que garante a existência de solução não-trivial positiva, dado por

$$
R^*=(1+2S)\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{(1+2S)^2}}\right]. \qquad (11)
$$

Note que $R^*>1$.

2.1.2 Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

A estabilidade é analisada por meio de Jacobiana (J) do sistema (1) calculada nos valores correspondentes aos pontos de equilíbrio.

Os autovalores de J do equilíbrio trivial $P_2=(0,0,0,0,\alpha/\mu_T)$ são $-(\gamma+\mu_A)$, $-(\beta+\mu_I)$, $-\mu_F$, $-\mu_M$, e $-\mu_T$; portanto P_2 é sempre localmente e assintoticamente estável.

Analisa-se os equilíbrios P_{3-} e P_{3+}. Para estes pontos, um dos autovalores é $-\mu_T$. Os demais autovalores são soluções do polinômio

$$
\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4 \qquad (12)
$$

com coeficientes

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (\mu_A+\gamma)\frac{C}{C-\bar{A}}+\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T} \\
&\quad +\mu_F+\mu_M \\
a_2 &= (\mu_A+\gamma)\left(\frac{C}{C-\bar{A}}\right) \\
&\quad \times\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}+\mu_F+\mu_M\right) \\
&\quad +\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right)(\mu_F+\mu_M) \\
&\quad +\mu_F\mu_M \\
a_3 &= \mu_F\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right) \\
&\quad \times(\mu_A+\gamma)\left(\frac{\bar{A}}{C-\bar{A}}\right)+\mu_M \\
&\quad \times\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right)(\mu_A+\gamma)\left(\frac{C}{C-\bar{A}}\right) \\
&\quad +\mu_F\mu_M\left(\mu_I+\frac{\beta\bar{M}+\beta_T\bar{M}_T}{\bar{M}+\bar{M}_T}\right) \\
&\quad +(\mu_A+\gamma)\mu_F\mu_M\left[\frac{C\bar{M}+\bar{M}_T\bar{A}}{(C-\bar{A})(\bar{M}+\bar{M}_T)}\right] \\
a_4 &= \frac{\mu_F\mu_M(\gamma+\mu_A)(\beta_T+\mu_I)\alpha}{(\bar{M}+\bar{M}_T)(C-\bar{A})\mu_T CS} \\
&\quad \times(\bar{A}^2+2CS\bar{A}-C^2S).
\end{aligned}
$$

Utilizando critérios de Routh-Hurwitz, as raízes do polinômio de quarto grau têm parte real negativa se e somente se $a_i>0$, com $i=1,\cdots,4$, e $(a_1a_2-a_3)a_3>a_1^2a_4$. Os coeficientes a_1, a_2 e a_3 do polinômio (12) são positivos. É possível mostrar que para $\bar{A}$ positivo, a última condição é satisfeita. Logo a estabilidade de P_{3-} e P_{3+} é dada pelo sinal do coeficiente a_4, que é positivo se e somente se

$$s(\bar{A})=\bar{A}^2+2CS\bar{A}-C^2S \tag{13}$$

é maior que zero. Note que $s(\bar{A})$ tem uma única raiz real postiva $\bar{A}=A^*=CS\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{S}}\right)$ e, da equação (8), satisfaz a inequação

$$A^*>\frac{2CS}{R-1}. \tag{14}$$

Determina-se agora o valor do polinômio (6) em A^*. Usando (13), e as inequações (8) e (14), obtém-se

$$
\begin{aligned}
p(A^*) &= \frac{R}{C}(-2CSA^*+C^2S)-(R-1)A^*+CS \\
&= -(2RS+R-1)A^*+(R+1)CS \\
&< -(2RS+R-1)\frac{2CS}{R-1}+(R+1)CS \\
&= -\frac{4RCS^2}{R-1}+(R-1)CS \\
&= (R-1)CS\left(\frac{4RS}{(R-1)^2}-1\right) \\
&= -\frac{4CRS^2}{(R-1)}\left(\frac{(R-1)^2}{4RS}-1\right)<0,
\end{aligned}
$$

de acordo com as condições de existência biológicas (7) e (8). A inequação $p(A^*)<0$ implica $\bar{A}_-<A^*<\bar{A}_+$ devido a positividade do coeficiente de $\bar{A}^2$. Como $s(\bar{A})$ é tal que $s(\bar{A})<0$ para $\bar{A}<A^*$ e $s(\bar{A})>0$ para $\bar{A}>A^*$, tem-se $a_4<0$ para $\bar{A}_-$ e $a_4>0$ para $\bar{A}_+$. Portanto P_{3-} é sempre instável e P_{3+}, localmente e assintoticamente estável.

Teorema 1. *O equilíbrio* $P_2=(0,0,0,0,\frac{\alpha}{\mu_T})$ *do sistema (1) é sempre estável. Quando* $R>1$ *e* $\frac{(R-1)^2}{4RS}\geq 1$*, o equilíbrio não-trivial,* P_{3-} *e* P_{3+} *são viáveis. Nesta situação* P_{3-} *é sempre instável e* P_{3+}*, estável.*

De acordo com Teorema 1, para $R>1$, se S situa-se acima do valor $\frac{(R-1)^2}{4R}$ então é possível controlar a doença, independentemente da condição inicial fornecida ao sistema dinâmico.

O equilíbrio trivial P_2 é estável para $R<R^*$. Quando $R=R^*$, o equilíbrio único P_3 aparece, dado por $P_3=(\bar{A},\bar{I},\bar{F},\bar{M},\frac{\alpha}{\mu_T})$, onde $\bar{A}=\frac{(R^*-1)}{2R^*}C$, e os valores $\bar{I}$, $\bar{F}$ e $\bar{M}$ são obtidos de (2) substituindo $\bar{A}$ obtido acima. Para $R>R^*$ e $\alpha>0$, P_3 divide em dois valores P_{3-} e P_{3+}, que são instável e estável, respectivamente. Chama-se R^* como valor limiar uma vez que este separa região onde existe somente machos estéreis ($R<R^*$) da região onde existe coexistência de mosquitos machos naturais e estéreis ($R>R^*$).

O valor limiar R^* depende de S, que é função linear de α, conforme equação (5), com $S(0)=0$ e $S(\alpha\to\infty)\to\infty$. Portanto, os valores extremos são $R^*(0)=1$ e $R^*(S\to\infty)\to\infty$.

Considere o caso $R>R^*$. Chama-se de equilíbrio de ruptura [8] para o ponto de equilíbrio instável $P_{3-}=(\bar{A}_-,\bar{I}_-,\bar{F}_-,\bar{M}_-,\frac{\alpha}{\mu_T})$, onde os valores $\bar{I}_-$, $\bar{F}_-$ e $\bar{M}_-$ são obtidos de (2) substituindo $\bar{A}$ por $\bar{A}_-$ dado por (9). A raiz menor $\bar{A}_-$ da equação (6) forma o ramo decrescente da solução do polinômio, com valor máximo em $R=R^*$ $\left(\bar{A}=\frac{(R^*-1)}{2R^*}C\right)$ e tende assintoticamente para $\bar{A}_-=0$, quando $R\to\infty$. Para $R>R^*$ este ramo decrescente separa duas regiões de atração de pontos de equilíbrios P_2 e P_{3+}. Em outras palavras, tem-se uma hipersuperfície gerada pelas coordenadas do equilíbrio P_{3-}, *e.g.*, $f(\bar{A}_-,\bar{I}_-,\bar{F}_-,\bar{M}_-,\frac{\alpha}{\mu_T})=0$, tal que um dos pontos de equilíbrio P_2 e P_{3+} é atrator dependendo da posição relativa da condição inicial aplicada ao sistema dinâmico (1) com relação à hipersuperfície.

2.2 Recrutamento Logístico de Machos Estéreis

Considera-se recrutamento da forma $\alpha M_T\left(1-\dfrac{M_T}{K}\right)$. Note que $\alpha\left(1-\dfrac{M_T}{K}\right)$ é a taxa percapita de recrutamento de machos estéreis. Assim o modelo dado por sistema de equações (1) é modificado para

$$\begin{aligned}
A' &= \phi\left(1-\frac{A}{C}\right)F-(\gamma+\mu_A)A\\
I' &= r\gamma A-\frac{\beta M I}{M+M_T}-\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-\mu_I I\\
F' &= \frac{\beta M I}{M+M_T}-\mu_F F\\
M' &= (1-r)\gamma A-\mu_M M\\
M_T' &= \alpha M_T\left(1-\frac{M_T}{K}\right)-\mu_T M_T,
\end{aligned}\qquad (15)$$

e as fêmeas não férteis são descritas por

$$U'=\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-\mu_U U.$$

A equação para machos estéreis apresenta dois pontos de equilíbrios: $\bar{M}_{T_0}=0$ e $\bar{M}_{T_1}=\dfrac{(\alpha-\mu_T)K}{\alpha}$. O último é biologicamente viável para $\alpha>\mu_T$. Uma característica deste modelo é o fato da estabilidade da quinta equação do sistema (15) sozinha mostra que o equilíbrio trivial $\bar{M}_{T_0}$ é estável quando $\alpha>\mu_T$; em outro caso, é instável e surge equilíbrio não-trivial $\bar{M}_{T_1}$.

O valor $\bar{M}_{T_0}=0$ resulta em dois equilíbrios. Um é o trivial $P_0=(0,0,0,0,0)$, mais $\bar{U}=0$, em que não existe nem mosquitos naturais, nem mosquitos estéreis, e o outro é um equilíbrio onde somente mosquitos naturais existem, dado por

$$P_1=(\bar{A},\frac{r\gamma}{\beta+\mu_I}\bar{A},\frac{(\gamma+\mu_A)C}{\phi(C-\bar{A})}\bar{A},\frac{(1-r)\gamma}{\mu_M}\bar{A},0),$$

com $\bar{A}=\dfrac{C(R-1)}{R}$ e R dado pela equação (4). Note que P_1 é biologicamente viável somente para $R>1$, assim para $R<1$ tem-se equilíbrio trivial P_0.

Análise linear mostra que $-\mu_M$ e $\alpha-\mu_T$ são autovalores da Jacobiana do sistema (15) em torno de P_0 e P_1. Para P_0 os outros autovalores são raízes do polinômio

$$\begin{aligned}
&\lambda^3+(\gamma+\mu_A+\beta+\mu_I+\mu_F)\lambda^2\\
&+[(\gamma+\mu_A)(\beta+\mu_I)+\mu_F(\gamma+\mu_A+\beta+\mu_I)]\lambda\\
&+\mu_F(\gamma+\mu_A)(\beta+\mu_I)(1-R).
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que condições de estabilidade deste polinômio são satisfeitas para $R<1$. No caso de outro ponto de equilíbrio, os autovalores de P_1 são as raízes do polinômio

$$\begin{aligned}
&\lambda^3+[R(\gamma+\mu_A)+\beta+\mu_I+\mu_F]\,\lambda^2\\
&+[R(\gamma+\mu_A)(\beta+\mu_F+\mu_I)+\mu_F(\beta+\mu_I)]\,\lambda\\
&+\mu_F(\gamma+\mu_A)(\beta+\mu_I)(R-1).
\end{aligned}$$

Para $R>1$ pode-se mostrar que as condições de estabilidade são satisfeitas.

Para $\bar{M}_{T_1}=\dfrac{(\alpha-\mu_T)K}{\alpha}$, os pontos de equilíbrio são

$$\begin{aligned}
P_2 &= (0,0,0,0,\bar{M}_{T_1}),\\
P_{3-} &= (\bar{A}_-,\\
&\quad \frac{r\gamma\bar{A}_-\left[(1-r)\gamma\bar{A}_-+\mu_M\bar{M}_{T_1}\right]}{(\mu_I+\beta)(1-r)\gamma\bar{A}_-+(\mu_I+\beta_T)\mu_M\bar{M}_{T_1}},\\
&\quad \frac{(\gamma+\mu_A)C\bar{A}_-}{\phi(C-\bar{A}_-)},\\
&\quad \frac{(1-r)\gamma\bar{A}_-}{\mu_M},\bar{M}_{T_1})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{3+} &= (\bar{A}_+,\\
&\quad \frac{r\gamma\bar{A}_+\left[(1-r)\gamma\bar{A}_++\mu_M\bar{M}_{T_1}\right]}{(\mu_I+\beta)(1-r)\gamma\bar{A}_++(\mu_I+\beta_T)\mu_M\bar{M}_{T_1}},\\
&\quad \frac{(\gamma+\mu_A)C\bar{A}_+}{\phi(C-\bar{A}_+)},\\
&\quad \frac{(1-r)\gamma\bar{A}_+}{\mu_M},\bar{M}_{T_1}),
\end{aligned}$$

onde $\bar{A}_-$ e $\bar{A}_+$, soluções do polinômio (6), são dadas pelas equações (9) e (10), em que se tem o mesmo R definido antes, equação (4), só que S é trocado por S_1 dado por

$$S_1=\frac{(\beta_T+\mu_I)\mu_M(\alpha-\mu_T)K}{(\beta+\mu_I)(1-r)\gamma C\mu_T}.\qquad (16)$$

A expressão S_1 vem de S substituindo α por $(\alpha-\mu_T)K$. As fêmeas não férteis são dadas por

$$\bar{U}=\frac{\alpha\beta_T\mu_M}{\mu_U\left[\alpha\mu_M+A(1-r)\gamma\mu_T\right]},$$

com A subsituído por $\bar{A}_-$ e $\bar{A}_+$ para resultar em equilíbrios P_{3-} e P_{3+}, respectivamente.

Para existência biológica de P_2, a condição $\alpha>\mu_T$ é necessária, e para equilíbrios P_{3-} e P_{3+}, inequações $R>1$ e

$$\frac{(R-1)^2}{4RS_1}\geq 1\qquad (17)$$

são necessárias. Para se ter duas soluções positivas deve-se ter $R>R^*$, dada pela equação (11), porém substituindo S por S_1.

A análise de estabilidade de P_2, P_{3+} e P_{3-} segue o mesmo padrão do modelo anterior . Tabela 1 resume a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio.

$\dfrac{\alpha}{\mu_T}$	R	estável	instável
< 1	< 1	P_0	—
< 1	> 1	P_1	P_0
> 1	$< R^*$	P_2	P_0, P_1
> 1	$> R^*$	P_2, P_{3+}	P_0, P_1, P_{3-}

Tabela 1. Estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo (15).

Primeiro, analisa-se a estabilidade com relação a R quando $\dfrac{\alpha}{\mu_T} < 1$. Quando $R < 1$, o equilíbrio P_0, onde não existe mosquitos, é estável. Este torna instável para $R > 1$ e P_1 surge como equilíbrio estável. Nesta situação a população de mosquitos estéreis vai para extinção para qualquer valor de R. Se $\dfrac{\alpha}{\mu_T} > 1$ população de machos estéreis vai para o valor $\bar{M}_{T_1} = \dfrac{(\alpha - \mu_T)K}{\alpha}$. Neste caso o controle biológico é dificultado em relação ao modelo anterior, pois o valor limiar R^* é menor que o fornecido pelo modelo (1).

Agora, fixa-se R e varia-se α de zero a infinito. Tem-se três casos diferentes dependendo do valor de R.
Caso I. $R < 1$. P_0 é estável para $\alpha < \mu_T$ e perde estabilidade quando $\dfrac{\alpha}{\mu_T} = 1$ é atingido. A partir deste valor o equilíbrio P_2 surge como estável para $\alpha > \mu_T$. A população natural vai para zero por ter taxa de oviposição muito pequena, o que torna liberação de machos estéreis desnecessária.
Caso II. $1 < R < R^*$. As trajetórias do sistema dinâmico tendem ao único valor de equilíbrio P_1 quando $\alpha < \mu_T$. Se $\alpha > \mu_T$, P_1 torna instável e surge P_2 que é estável. Então, a erradicação de mosquitos naturais não é possível até alcançar $\dfrac{\alpha}{\mu_T} = 1$.
Caso III. $R > R^*$. P_1 é assintoticamente estável para $\alpha < \mu_T$, mas torna instável e P_2, P_{3_+} e P_{3_-} surgem quando $\alpha > \mu_T$. Os dois primeiros pontos de equilíbrio são assintoticamente estáveis e o terceiro é instável. Quando $\alpha = \alpha^*$ onde α^* é o valor para qual $(R-1)^2/4RS_1 = 1$, P_{3_+} e P_{3_-} colapsam para equilíbrio P_3, e torna inviável para $\alpha > \alpha^*$. No último caso P_2 é globalmente e assintoticamente estável. Então erradicação do mosquito natural é atingida para valores acima do limiar α^*. Para valores de α entre μ_T e α^* o controle não é necessariamente obtido uma vez que depende das condições iniciais, como no modelo (1).

3 Conclusão

Para população de mosquitos, competitividade no acasalamento e dispersão de machos estéreis devem ser relevantes na técnica de liberação de machos estéreis para controlar os mosquitos naturais. Estas propriedades foram mimetizadas por parâmetros p e q. Experimentos de campo mostraram que a competitividade entre os machos naturais e estéreis de *A. aegypti* situavam entre moderado e bom [11, 24] (o que pode sugerir p aproximadamente $0,8$). Quando a liberação de mosquitos estéreis é adequada (12 a 15 estéreis em uma população com taxa de oviposição em torno de 10 ovos por dia), pode resultar em elevada produção de ovos não viáveis. Porém, a técnica de liberação de insetos deve prevenir contra possíveis migrações de fêmeas férteis para áreas controladas biologicamente [19]. O modelo aqui analisado não estudou este fator que afeta a liberação de insetos estéreis. Outros fatores, como migração de mosquitos naturais, devem ser considerado em modelos para estudar como pode-se manter regiões livres dos mosquitos por ação de machos estéreis.

Referências

[1] Barclay, H. J. (1980a). Models for the sterile insect release method with the concurrent release of pesticides.*Ecological Modelling* 11: 167-178.

[2] Barclay, H.J. (1980b). The sterile insect-released method on species with two-stage life cylces. *Res. Pop. Ecol.* 21:165-180.

[3] Barclay H.J. (1982). Pest population stability under sterile release. *Res. Pop. Ecol.* 24: 405-416.

[4] Barclay, H.J.(1982). The sterile release method with inequal male competitive ability. *Ecol. Modelling* 15:251-263

[5] Barclay, H.J.and P. Van den Driessche (1990). A sterile release model for control of a pest with two life stages under predation. *Rocky Mountain J. of Math.* 20 (4):847-855.

[6] Barclay, H.J. (1996). Combining methods of insect pest control. Modelling selection for resistance to control methos in combination. *Reserv. Pop. Ecol.* 34: 97-107.

[7] Bartlett, A. C. (1990). Insect sterility, insect genetics, and insect control. In *Handbook of Pest Management in Agriculture Vol. II.* D. Pimentel Ed., CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 279-287.

[8] Bradley, D. J. and R. M. May (1978). Consequences of helminth aggregation for the dynamics of schistosomiasis. *Trans. R. Soc. Trop. Med. Hyg.* 72(3): 262-273.

[9] Coleman P.G. and Alphey L. Editorial: Genetic control of vector population: an imminent prospect (2004). *Tropical Medicine and & International Health* 9 (4): 433-437.

[10] Costello W.G. and H. M. Taylor (1975). Mathematical models of the sterile male technique of insect control. In *Mathematical Analysis of Decision Problems in Ecology.* Lect Notes Biomath. 5, A. Charnes and W. R. Lynn, Eds., Springer-Verlag, Berlin, pp 318-359.

[11] Grover K. K., S. G. Suguna, D. K. Uppal, K. R. P. Singh, M. A. Ansari et al (1976). Field experiments on the competitiveness of males carrying genetic control systems for *Aedes aegypti. Entomol. Exp. Appl.* 20: 8-18.

[12] Gubler D. J. (1986). Dengue, in *The arboviruses: Epidemiology and Ecology* Vol. II. T.P. Monath (Ed.), Florida: CRC Press, pp. 213-261.

[13] Dietz K. (1976). The effect of immigration on genetic control. *Theor. Popul. Biol.* 9:58-67

[14] Hale J. K. (1969). rdinary Differential Equations. John Wiley and Sons, New York.

[15] Harrison, G.W., H.J. Barclay and P. van den Driesche (1982). Analysis of a Sterile Insect Release Model with Predation. *J. Math. Biology* 16: 33-44.

[16] Knipling, E.F. (1955). Possibilities of insect control or eradication through the use of sexually sterile males. *J. Econ. Entomol.*48: 459-462.

[17] Knipling, E. F. (1979). The Basic Principles of Insect Population Suppression and Management. U. S. Dept. of Agriculture.*Agriculture Handbook No. 512*, Washington, D. C.

[18] Knipling, E. F. (1985). Sterile insect technique as a screwworm control measure: The concept and its development. In Symposium on Eradication of the Screwworm from the United States and Mexico. *Misc. Publ. Entomol. Soc. America* 62, O. H. Graham ed., College Park, MD, pp. 4-7.

[19] Pates H. and Christopher Curtis. Mosquito Behavior and Vector Control (2004). To appear in *Annu. Rev. Entomol.* 50: 53-70.

[20] Plant R. E. and M. Mangel (1987). Modeling and simulation in agricultural pest management. *SIAM Rev.* 29: 235-261.

[21] Prout T. (1978). The joint effects of the release of sterile males and immigration of fertilized females on a density regulated population. *Theor. Popul. Biol.* 13: 40-71.

[22] Reiter P., M. A. Amador, R. A. Anderson, G. C. Clark (1995). Short report: dispersal of *Aedes aegypti* in an urban area after blood feeding as demonstrated by rubidium-marked eggs. *Am. J. Trop. Med. Hyg.* 52: 177-179.

[23] Reuben R., K. Rahman, P. Das P. Panicker, G. Brooks (1975). The development of a strategy for large-scale releases of sterile males of *Aedes aegypti. J. Commun. Dis.* 7:313-326.

[24] Seawright J. A., P. E. Kaiser, D. A. Dame (1977). Mating competitiveness of chemosterilized hybrid males of *Aedes aegypti* (L.) in field tests. *Mosq. News* 37: 615-619.

[25] Singh K. R. P. and G. D. Brooks (1975). Semi-automatic rlease system for distribution of mosquitoes during genetic control operations. *J. Commun. Dis* 7: 288-293.