

Métodos Geométricos em Eletrodinâmica

Márcio A. Faria Rosa,

Depto de Matemática, IMECC, Unicamp

13083-859, Campinas, SP

E-mail: marcio@ime.unicamp.br

Igor L. Freire*

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp

13083-859, Campinas, SP

E-mail: igor@ime.unicamp.br

Roldão da Rocha†

Instituto de Física Gleb Wataghin, IFGW, Unicamp

13083-970, Campinas, SP

E-mail: roldao@ifi.unicamp.br

1. Resumo

O objetivo do presente trabalho é utilizar os métodos da geometria diferencial para reescrever as equações da eletrodinâmica e obter a diádica de Green, as equações de Fresnel e a previsão da rotação de Faraday para ferritas utilizando a teoria das formas diferenciais. Tal formalismo encontra grande aplicabilidade na física-matemática, como pode ser vista em [1] - [3], e nos últimos anos tem havido a utilização de tal ferramenta no tratamento de problemas de engenharia elétrica, como pode ser visto em [4] e [5].

Inicialmente apresentamos o operador derivação exterior d , que aplica campos de p -formas em campos de $(p+1)$ -formas e em seguida, o dual de Hodge, que relaciona p -formas com $(n-p)$ -formas, onde n é a dimensão do espaço. Dada uma matriz hermitiana inversível, podemos definir novos duais através da equação abaixo:

$$\begin{aligned} \star_A dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} &= \\ = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_p j_p} \epsilon_{j_1 \cdots j_n} \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!} dx^{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $g^{ij} = \frac{a_{ji}^*}{\det A}$, ϵ e $|g|$ denotam o tensor de Levi-Civita e o determinante da matriz de métrica (g_{ij}) , respectivamente, e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. No caso em que $A = I$, escrevemos simplesmente \star .

Dessa forma, com o dual de Hodge e derivação exterior, as equações de Maxwell são (confira [1] - [5])

$$dE = i\omega B, \quad (1.2)$$

$$dH = -i\omega D + J, \quad (1.3)$$

*bolsista da Capes

†bolsista da Capes

$$dD = \rho, \quad (1.4)$$

$$dB = 0. \quad (1.5)$$

onde D , B e J denotam as 2-formas deslocamento elétrico, indução magnética e densidade de corrente, respectivamente; H , E e ρ denotam as 1-formas campo magnético, campo elétrico e a 3-forma densidade de carga, respectivamente. A dependência temporal é suposta na forma $e^{i\omega t}$ ([1], [3], [4] e [5]).

As relações constitutivas entre os campos são:

$$D = \star_\epsilon E, \quad (1.6)$$

$$B = \star_\mu H. \quad (1.7)$$

onde (ϵ) e (μ) denotam as matrizes associadas aos tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio, respectivamente. A vantagem de utilizarmos o dual de Hodge da maneira como foi feita nas Eqs. (1.6) e (1.7) são que embutimos na métrica do nosso espaço as propriedades elétricas e magnéticas do meio ao qual estamos trabalhando.

Supondo que as matrizes associadas aos tensores permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio são hermitianas inversíveis, a partir das Eqs. (1.2), (1.3), (1.6) e (1.7) é possível ([1], [3], [4] e [5]) obter-se a diádica de Green de maneira exata.

Para ferritas, a matriz associada ao tensor de permissividade é ϵI , onde ϵ é um escalar e a matriz μ é:

$$\mu = \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta & \\ i\beta & \alpha & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Em [1] e [3] mostramos que a diádica de Green neste caso é:

$$g = g_0 \text{diag} \left(e^{i\omega\sqrt{\sigma_-}r'}, e^{i\omega\sqrt{\sigma_+}r'}, e^{i\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0(\alpha^2-\beta^2)}r'} \right) \quad (1.9)$$

onde

$$g_0 = \frac{\mu_0^2(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{4\pi r'},$$

$$\sigma_{\pm} = \varepsilon\mu_0(\alpha \pm \beta)\gamma.$$

$$\vec{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha+\beta}}, \frac{y}{\sqrt{\alpha-\beta}}, \frac{z}{\sqrt{\gamma}} \right).$$

Além do mais, utilizando o produto interior entre formas diferenciais e as componentes dos campo elétrico e indução magnética, obtivemos as expressões:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{n^2 - c^2\varepsilon\mu_i} = \frac{1}{n^2}. \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{c^2\varepsilon\mu_i}} = 0 \quad (1.11)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0. \quad (1.12)$$

onde $v_i = \varepsilon\mu_i$. As Eqs. (1.10), (1.11) e (1.12) são as equações de Fresnel para ferritas ([1] e [3]).

Em [1] e [3], mostramos que o campo magnético satisfaz a equação

$$\omega^2\varepsilon \star_{\mu} H = d \star dH. \quad (1.13)$$

Supondo que a 1-forma campo magnético seja

$$H = (H_1 dx + H_2 dy) e^{i(kz - \omega t)}$$

a Eq.(1.13) nos dá uma equação de autovalor para k^2 . Resolvendo a mesma e tomando uma combinação linear particular, as componentes do campo magnético na direção de dx e dy independentes do tempo são dadas por ([1] e [3]):

$$H_1(z) = \frac{h}{2} e^{ik+z} + \frac{h}{2} e^{ik-z}, \quad (1.14)$$

$$H_2(z) = i\frac{h}{2} e^{ik+z} - i\frac{h}{2} e^{ik-z}. \quad (1.15)$$

onde $k_{\pm} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0\alpha \pm \beta}$.

As expressões das Eqs. (1.14) e (1.15) podem ser reescritas em termos de funções trigonométricas. Considerando θ_0 como sendo o ângulo cuja tangente seja a Eq. (1.15) dividida pela Eq. (1.14), chegamos a:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} z\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0\alpha} \left[\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha}} \right]. \quad (1.16)$$

Supondo que termos de ordem cúbica ou superiores podem ser desprezados, obtemos:

$$\theta_0 = \frac{\beta}{2\alpha} z\omega\sqrt{\alpha\mu_0\varepsilon}. \quad (1.17)$$

A Eq. (1.17) nos diz que as componentes do campo numa onda percorrendo uma certa distância numa direção é defletida através de um ângulo θ_0 com respeito a direção do campo. Quando a onda é refletida e retorna ao ponto inicial, ela sofre uma nova deflexão de θ_0 , de modo que ela sofre uma rotação total de $2\theta_0$.

Como $\theta_0 \neq 0$, segue que a ferrita é um meio não-recíproco, isto é, quando a onda retorna à posição original, suas componentes diferem das originais. A previsão da rotação de Faraday mostra a consistência do formalismo empregado, uma vez que reobtivemos um resultado classicamente conhecido e experimentalmente comprovado.

A escolha por tal formalismo advém do fato de podermos obter os resultados proporcionados pelo cálculo vetorial usual de uma maneira mais clara, concisa e elegante, sem a necessidade de se ficar empregando produtos vetoriais ou cálculos com rotações extremamente tediosos, como se faz tradicionalmente. Ademais, com tais ferramentas, nossos cálculos independem do sistema de coordenadas utilizado e são facilmente generalizáveis para dimensões superiores, podendo inclusive englobar a gravitação.

Referências

- [1] I. L. Freire, “Aplicação de Formas Diferenciáveis à Eletrodinâmica de Meios Anisotrópicos”, *Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada*, IMECC-Unicamp, (2004).
- [2] Y. N. Obukhov e F. W. Hehl, A gentle introduction to the foundations of classical electrodynamics: The meaning of the excitations (D, H) and the field strengths (E, B). [[physics/0005084](#)].
- [3] R. da Rocha, I. L. Freire e M. A. Faria Rosa, Spacetime Deformations and Electromagnetism in Material Media, *R.P 27/05-IMECC-Unicamp, submetido ao Can. J. Phys.* [[physics/0502012](#)] (2005).
- [4] K. F. Warnick e D. V. Arnold, Green Forms for Anisotropic, Inhomogeneous Media, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 11 (1997) 1145-1164.
- [5] K. F. Warnick, “A Differential Forms Approach to Electromagnetics in Anisotropic Media”, *Tese de doutorado em engenharia elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica e Computação*, Brigham Young University, (1997).