Decomposição de Respostas Dinâmicas para Entradas Periódicas em um Modelo de Rotores

Inês F. Ferreira,
Departamento de Matemática, CCNE, UFSM,
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: ifmoraes@smail.ufsm.br,

Rosemaira D. Copetti, **Antonio Carlos L. Bidel**
Departamento de Matemática, CCNE, UFSM,
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: rmaira@smail.ufsm.br , bidel@smail.ufsm.br

Este trabalho visa obter a decomposição de respostas forçadas para um modelo da dinâmica de rotores. O modelo considerado é o de Stodolla-Green, utilizado para simular o efeito giroscópico, além da resposta dinâmica devido ao desbalanço de sistemas rotativos [6]. Esta decomposição consiste em separar a resposta forçada como uma soma de uma resposta permanente e de uma resposta livre induzida pelas condições iniciais da resposta permanente. No cálculo da decomposição da resposta é utilizada a resposta impulso, a qual permite gerar uma base que caracteriza o transiente introduzido pelo sistema. Estas informações possibilitam o monitoramento dos parâmetros de retroação e de estabilidade do sistema.

O modelo matemático é descrito por uma equação diferencial ordinária matricial de segunda ordem com amortecimento e efeitos giroscópicos expressa por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + (\mathbf{C}+\mathbf{G})\,\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{f}(t), \qquad (1)$$

sendo a saída do sistema dada por

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} Y_c & Z_c & \beta_Y & \beta_Z \end{bmatrix}^T;$$

onde Y_c e Z_c são deslocamentos do centro geométrico nas direções Y e Z, respectivamente, com relação a um sistema referencial fixo; β_Y e β_Z correspondem aos ângulos determinados entre o eixo X e a projeção do eixo x sobre o plano XZ e XY, repectivamente. O parâmetro $\mathbf{M}$ corresponde a matriz de inércia definida por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix},$$

onde m é a massa do rotor e I_{yy} é o momento de inércia de massa em torno do eixo que tem a origem perpendicular ao eixo x; a matriz $\mathbf{G}$ corresponde a matriz giroscópica dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2I_{xx}\omega \\ 0 & 0 & -2I_{xx}\omega & 0 \end{bmatrix},$$

onde I_{xx} é o momento de inércia de massa do rotor em torno do eixo que tem a origem paralela ao eixo x e ω a velocidade de rotação do rotor; $\mathbf{C}$ é a matriz de amortecimento definida por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\beta \end{bmatrix},$$

onde c_ω e c_β são os coeficientes de amortecimento e, $\mathbf{K}$ corresponde a matriz de rigidez expressa por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{\omega\omega} & 0 & 0 & k_{\omega\beta} \\ 0 & k_{\omega\omega} & -k_{\omega\beta} & 0 \\ 0 & -k_{\omega\beta} & k_{\beta\beta} & 0 \\ k_{\omega\beta} & 0 & 0 & k_{\beta\beta} \end{bmatrix},$$

onde $k_{\omega\omega}$, $k_{\omega\beta}$ e $k_{\beta\beta}$ são os coeficientes de rigidez. A entrada no sistema é definida por uma força centrípeta devido ao desbalanço do rotor, sendo do tipo períodica e representada por

$$\mathbf{f}(t) = m\varepsilon\omega^2 \begin{bmatrix} e^{I\omega t} & e^{I\omega t} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

onde m é a massa do rotor, e a excentricidade e ω a velocidade de rotação do mesmo.

A resposta forçada do sistema é obtida analiticamente em função da resposta impulso, sendo esta determinada a partir de uma representação analítica obtida por Claeyssen, veja-se em [2] e [3]. A expressão da resposta forçada é denotada por

$$\mathbf{w}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (2)$$

onde $h(t)$ pode ser definida pela fórmula fechada [2]

$$h(t)=\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{2n-j}, \tag{3}$$

onde $h_k = h^{(k)}(0)$ satisfaz a *equação matricial em diferenças*

$$\mathbf{M}h_{k+2} + (\mathbf{C}+\mathbf{G})\, h_{k+1} + \mathbf{K}h_k = 0, \tag{4}$$

com valores iniciais

$$h_0 = 0, \quad \mathbf{M}h_1 = I.$$

O polinômio de grau $2n$, denotado por

$$P(s) = \det\left[\mathbf{M}s^2 + (\mathbf{C}+\mathbf{G})\, s + \mathbf{K}\right] = \sum_{k=0}^{2n} b_k s^k \tag{5}$$

corresponde ao *polinômio característico* associado ao sistema e, $d(t)$ representa a solução do *problema de valor inicial* expresso por

$$b_{2n} d^{(2n)}(t) + \cdots + b_1 \dot{d}(t) + b_0 d(t) = 0, \tag{6}$$

com os valores iniciais dados

$$d(0) = 0, \cdots, d^{(2n-2)}(0) = 0, b_{2n} d^{(2n-1)}(0) = 1. \tag{7}$$

A resposta forçada é decomposta na soma de uma solução homogênea $\mathbf{w}_h(t)$ e numa solução não-homogênea $\mathbf{w}_p(t)$, ou seja,

$$\mathbf{w}(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \mathbf{w}_h(t) + \mathbf{w}_p(t), \tag{8}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_h(t) = &-h(t-t_0)[(C+G)\mathbf{w}_p(t_0) + M\dot{\mathbf{w}}_p(t_0)] + \\ &-\dot{h}(t-t_0) M \mathbf{w}_p(t_0).\end{aligned} \tag{9}$$

Esta expressão significa que, conhecidas as condições iniciais de uma solução não-homogênea $\mathbf{w}_p(t)$, a solução homogênea $\mathbf{w}_h(t)$ fica determinada com o auxílio da resposta impulso $h(t)$.

Nas simulações numéricas do modelo foram considerados os valores dos parâmetros de acordo com a referência [6] e comparados os resultados provenientes da decomposição da resposta forçada com o valor obtido da mesma quando calculada a convolução diretamente através da Equação (2). Os resultados obtidos por esta metodologia foram considerados satisfatórios.

Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pela FAPERGS.

Referências

[1] A.C.L. Bidel, "Respostas Periódicas em Sistemas Lineares e Fracamente Não Lineares Não Ressonantes e Comportamento Dinâmico de Sistemas Rotativos com o uso da Base Dinâmica", Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Porto Alegre, RS, 2003.

[2] J.C. Claeyssen, "On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions", *Journal of Sound and Vibration*, 140(1) (1990) 73-84.

[3] J.R. Claeyssen, G.C. Suazo, C. Jung, "A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations", *Applied Numerical Mathematics*, vol. 30, (1999) 65-78.

[4] I.F. Ferreira, J.R. Claeyssen, R.D. Copetti, "Decomposition of Forced Responses in Vibrating Systems", *Applied Numerical Mathematics*, 47, (2003) 391-405.

[5] I.F. Ferreira, A.C.L. Bidel, R.D. Copetti, "Uma Abordagem Direta para Sistemas Evolutivos através da Resposta Impulso", *Anais do IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Série Arquimedes 4, (2005) 1838-1887.

[6] J.H. Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations - Theory and Applications", John Wiley, New York, 2001.

[7] S.K. Godunov, "Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient", American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.