

Método de Partículas para a Modelagem de Fluidos Incompressíveis

Jairo H. Tovar, Kazuo Nishimoto

Departamento de Engenharia Naval e Oceânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

jaitovar@usp.br

Jose Solano

Instituto de Matemáticas e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

jsolano@ime.usp.br

Resumo. Dentre os recentes métodos de modelagem de fluidos, incluindo as superfícies livres, destacam-se os métodos que dispensam malhas, conhecidos como Métodos de Partículas. Nestes métodos permitem-se a modelagem e simulação de diferentes propriedades físicas do fluido, representado por partículas, cada uma contendo posição, velocidade, pressão e massa fixa. As EDP de governo, equações de Navier-Stokes em formalismo *langrangiano*, são convertidas em modelos de interação entre as partículas a partir de operadores diferenciais *gradiente* e *laplaciano*, fazendo uso de uma função *kernel* de interpolação assim como de um algoritmo semi-implícito (MPS-Moving Particle Semi-Implicit Method). Neste trabalho desenvolve-se uma extensão do método de partículas para a modelagem de fluidos com uma aplicação ao problema de impacto hidrodinâmico de um modelo bi-dimensional em forma de cunha. Resultados numéricos e sua comparação com ensaios experimentais são também apresentados.

Keywords: CFD, Método de Partículas, MPS, Interação Fluido-Estrutura, Impacto Hidrodinâmico.

1. INTRODUÇÃO

Métodos computacionais para a simulação de fluidos incompressíveis foram baseados, nas últimas décadas, na discretização do domínio em células elementares, métodos chamados de malhas – *Grids* ou *Mesh Method* - utilizando-se de uma formulação *euleriana* das equações da mecânica dos fluidos. Contudo, segue sendo difícil analisar problemas em que o contorno da interface muda continuamente com as superfícies livres, envolvendo o complexo fenômeno de impacto hidrodinâmico, isto reflete à carência de pesquisas de métodos numéricos aplicados especificamente a este problema.

O problema de interação fluido-estrutura é importante em muitas aplicações da engenharia. O fenômeno de impacto hidrodinâmico de um corpo sólido, rígido ou elástico, na superfície livre da

água, é uma destas aplicações. Este fenômeno pode ser observado na proa das embarcações navegando sobre ondas, no pouso e decolagem de aviões anfíbios; no lançamento de balsas salva vidas e no impacto das ondas em estruturas oceânicas como plataformas de petróleo e em cais, quebra-mares e outras estruturas portuárias.

Recentemente têm se desenvolvido uma família de métodos numéricos que dispensam o uso de malhas – *Grid-less* ou *Meshless Methods*, conhecidos como Métodos de Partículas - em que cada partícula-fluido segue uma formulação *langrangiana*. Neste trabalho é desenvolvido um método de partículas para analisar o problema de interação fluido-estrutura, mais particularmente o fenômeno de impacto hidrodinâmico. Não havendo a necessidade de nós neste método as deformações topológicas das interfaces podem ser completamente analisadas.

2. EQUAÇÕES DE GOVERNO

As equações de Euler e Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido em R^n ($n=2$ ou 3). Em essas equações as variáveis a serem encontradas são um vetor de velocidade $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1 \leq i \leq n} \in R^n$ e a pressão $p(x,t) \in R^n$ definidos para a posição $x \in R^n$ e $t \geq 0$.

Aqui restringimos a atenção para fluidos incompressíveis, assim às equações de Navier-Stokes são dadas por,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \quad (x \in R^n, t \geq 0) \quad (1)$$

$$\text{div } u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (x \in R^n, t \geq 0) \quad (2)$$

sendo as condições iniciais:

$$u(x,0) = u^0(x) \quad (x \in R^n) \quad (3)$$

Nas equações anteriores, $f_i(x, t)$ são as componentes da força externa aplicada e conhecida sobre o fluido (por exemplo a gravidade), ν é um coeficiente positivo (a viscosidade), $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o

laplaciano no espaço das variáveis e u^0 é a velocidade inicial conhecida. As equações de Euler são (1),(2) e (3) com ν igual a zero.

A Eq. (1) é justamente a Lei de Newton $f = m a$ para um elemento de fluido sujeito à força externa $f = (f_i(x, t))_{1 \leq i \leq n}$ e às forças que surgem da pressão e da fricção. A Eq. (2) significa que o fluido é considerado incompressível.

Em uma formulação *lagrangiana*, para fluidos incompressíveis e não viscosos, as equações de conservação da massa e conservação do momento, sem o termo de viscosidade, tomam a forma das Eq. (4), a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + f \end{aligned} \quad (4)$$

Onde ρ, u, P e f representam a densidade, a velocidade, a pressão e as forças externas atuando sobre o fluido, correspondentemente.

As Eq. (4) são as equações de Navier-Stoke em coordenadas materiais envolvendo termos de convenção que são calculados diretamente pelo movimento das partículas.

No processo de discretização das Eq. (4) todos os termos expressados por operadores diferenciais são substituídos pelas interações entre as partículas. Com este fim serão apresentados mais adiante modelos de interação entre estas partículas.

Neste trabalho e para a aplicação do problema de interação fluido-estrutura, utiliza-se a formulação *lagrangiana* das equações de Navier-Stoke, Eq. (4).

3. MÉTODO DE PARTÍCULAS

Formulação Básica

O método que será usado para examinar o problema de impacto tem origem no método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamic), desenvolvido nos 70's por Gingold e Monaghan [1] e Lucy [2], como uma tentativa para modelar física contínua, evitando as limitações do método das diferenças finitas. A discretização espacial das variáveis de estado é proporcionada por um conjunto de pontos. Em lugar de *grids*, o método utiliza uma função *kernel* para interpolar as variáveis do campo em qualquer ponto do domínio. Assim, uma estimação

do valor de uma função $f(x)$ na localização x é dada em forma contínua por:

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x') w(x - x', h) dx' \quad (5)$$

Onde $\langle \rangle$ denota a aproximação *kernel*, h é um parâmetro que define o tamanho do suporte do *kernel*, conhecido como o comprimento de suavidade e x' é a nova variável independente.

Quando a função $f(x)$ é conhecida só num número finito de pontos o valor de uma variável numa partícula, denotada pelo subíndice i , é calculado somando as contribuições de um conjunto de partículas vizinhas, denotadas pelo super índice j e para o qual o *kernel* é diferente de zero.

$$\langle f(x^i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) w(x^i - x^j, h) \quad (6)$$

Para completar a discretização é necessário definir a função *kernel*. Diferentes funções *kernel* tem sido discutidas na literatura, desde polinomiais até gaussianas, como podem ser vista em Monaghan e Gingold [3], Koshizuka et. al. [4], Koshizuka et. al. [5] e Koshizuka e Oka [6]. SPH tem sido inicialmente aplicado para fluidos compressíveis, já um outro método de partículas, o MPS (Moving Particle Semi-Implicit Method), foi proposto para simular fluidos incompressíveis. Uma extensão deste último método é discutida neste estudo para o tratamento de problemas de interação fluido-estrutura.

Método de Partículas MPS

O método de partículas MPS foi apresentado inicialmente por Koshizuka e Oka [6]. Este método de natureza *lagrangiana*, foi desenvolvido para resolver as equações de governo de fluidos incompressíveis. O MPS requer somente das propriedades dos fluidos, sua posição e velocidade inicial. Na avaliação da incompressibilidade, faz-se uso de um algoritmo semi-implícito. O MPS dispensa o uso de malhas, discretizando o espaço por intermédio de partículas (pontos *lagrangianos*), onde a solução será conhecida. Todas as variáveis do problema são calculadas nesses pontos, fazendo uso de uma função *kernel* de interpolação.

Neste estudo uma partícula interage com as outras da sua vizinhança e delimitada pela função de peso *kernel* $w(r)$ igual a:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e - r}{r} & (0 \leq r < r_e) \\ 0 & (r_e \leq r) \end{cases} \quad (7)$$

Onde r é a distância entre duas partículas e r_e é o raio da área de interação como é mostrado na figura 1.

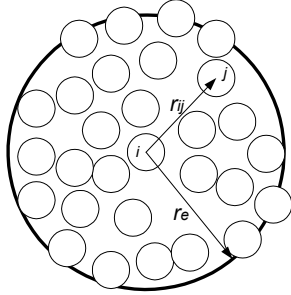


Figura 1: Área de Interação

Modelos de Interação entre Partículas

Com a finalidade de avaliar o termo de gradiente da pressão na Eq. (4), é necessário calcular os vetores gradientes nas posições das partículas. Para isto, os vetores gradientes entre as partículas i e sua partícula vizinha j são ponderados com a função *kernel*, Eq. (7), e assim obtêm-se o vetor gradiente na partícula i , segundo a Eq. (8).

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|r_j - r_i|^2} (r_j - r_i) w(|r_j - r_i|) \right] \quad (8)$$

onde d é o número de dimensões do espaço, r_i a posição da partícula i , e n^0 a densidade do número de partículas na configuração inicial.

$$n^0 = \sum_{j \neq i} w(|r_j^0 - r_i^0|) \quad (9)$$

O *laplaciano* é um operador representando difusão. No método MPS, difusão é modelada pela distribuição de uma quantidade a partir de uma partícula i para suas partículas vizinhas j usando a função *kernel*. Assim, o modelo *laplaciano* pode ser expresso pela Eq. (10).

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} [\phi_j - \phi_i w(|r_j - r_i|)], \quad (10)$$

Na Eq. (10), o parâmetro λ representa um incremento da variância e é igual daquele da solução analítica da Eq. (11).

$$\lambda = \int_V w(r) r^2 dv^* \left[\int_V w(r) dv \right]^{-1} \quad (11)$$

O teorema do limite central garante que a solução numérica se aproxime da solução analítica quando o aumento da variância é a igual ao da solução analítica. Este modelo *laplaciano* é aplicado à equação de *poisson* de pressão e aos termos de difusão nas equações de Navier-Stoke.

O Algoritmo

O algoritmo semi-implícito utilizado é apresentado na figura 2. Todos os termos exceto os de gradiente de pressão são calculados explicitamente, obtendo-se os valores temporais da velocidade necessários junto com as posições das partículas, também temporais, para o cálculo da pressão, equação de Poisson, Eq. (12).

$$\nabla^2 P_i^{n+1} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (12)$$

onde n_i^* é a densidade do número de partículas em torno da partícula i . Foi utilizado o método de gradiente conjugado pré-condicionado incompleto de Cholesky (ICCG), para a solução das EDP da Eq. (12).

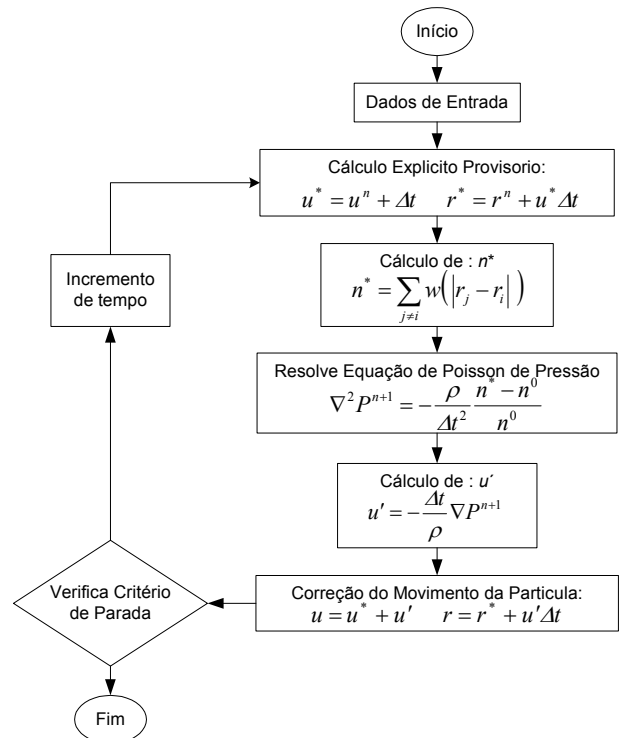


Figura 2: Algoritmo Semi-Implícito de Partículas - MPS

4. ENSAIOS NUMÉRICOS E RESULTADOS

Ensaio numérico do fenômeno de impacto hidrodinâmico foram realizados utilizando o método MPS. Os resultados foram comparados com ensaios experimentais já efetuados e validados por Miyagi [7] no tanque de provas do laboratório de Engenharia Naval da EPUSP.

O procedimento experimental foi executado lançando o modelo de impacto bidimensional na superfície do tanque em queda livre a partir de uma altura determinada. O modelo foi instrumentado com transdutores de pressão como mostra a figura 3, registrando as pressões dinâmicas pontuais na face de impacto do modelo.

O modelo de impacto utilizado na comparação foi uma cunha, confeccionada em acrílico transparente com uma massa de 4,8 Kg e um ângulo de elevação em relação à horizontal de 45° . A massa total incluindo o modelo e o conjunto carro haste é de 18 kg.

Simulou-se numericamente o fenômeno de contato e interação de um fluido por meio do método MPS. A cunha e o tanque foram representados por 4848 e 566 partículas respectivamente, utilizando-se a mesma massa e dimensões usadas no procedimento experimental de Miyagi [7]. No método MPS as paredes de contorno são representadas por um arranjo de partículas fixas com velocidades iguais a zero. As paredes da esquerda, do fundo e da direita são representadas por 621 partículas. A distância entre as duas partículas vizinhas é de 1.0×10^{-2} m. A figura 4 ilustra o modelo experimental e numérico da cunha, detalhando as localizações de tomadas das pressões. Os parâmetros de cálculo da simulação numérica são listados na tabela 1.

A comparação da simulação pelo método das partículas com uma imagem do fenômeno fotografada por Miyagi [7] é apresentada na figura 5. Pode-se observar a semelhança do cálculo numérico com o problema real.

A figura 6 representa os resultados de séries temporais de pressão de impacto da cunha de 45° medidos em 5 diferentes localizações da face do modelo de impacto, P1 a P5, a partir do procedimento experimental. A altura de queda Δh determina a velocidade de queda no instante do impacto na superfície livre. A figuras 7 ilustra os resultados nas mesmas localizações na superfície da cunha, mas desta vez, utilizando o procedimento numérico derivado do método MPS. A velocidade de queda da cunha é representada numericamente pela figura 8.

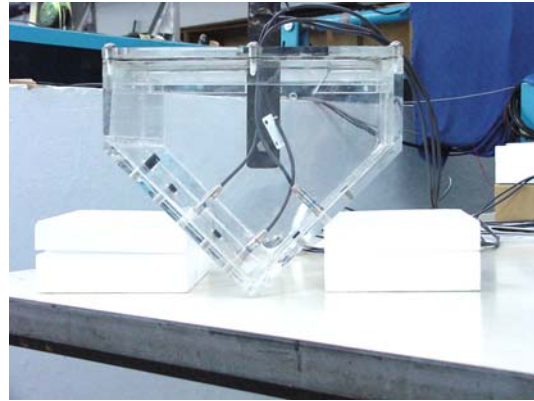


Figura 3: Foto do modelo de cunha de ângulo de *deadrise* $\beta = 45$ - [7]

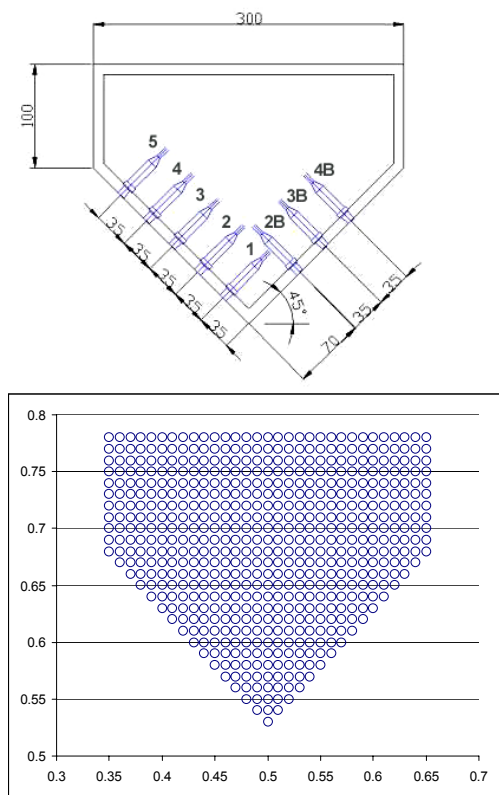
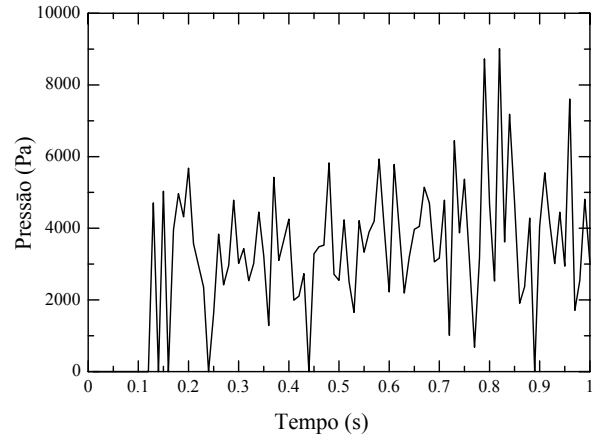
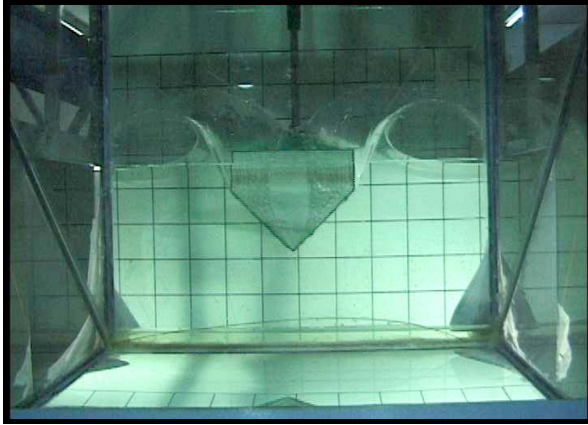


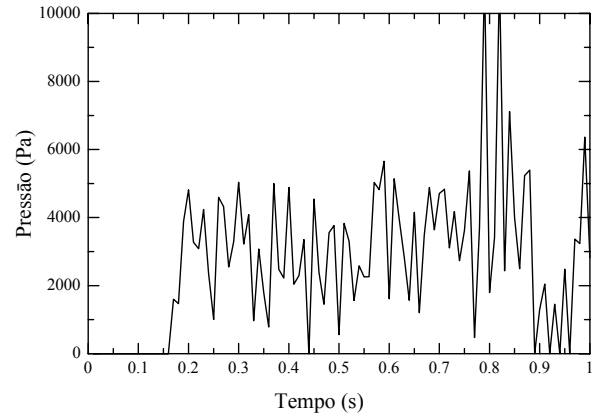
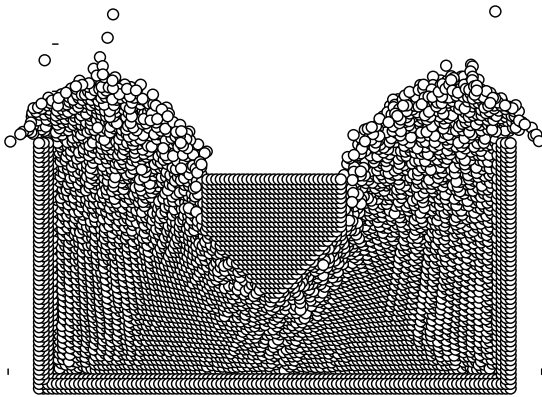
Figura 4: Modelo de cunha experimental e numérico de ângulo de *deadrise* $\beta = 45^\circ$

Tabela 1: Parâmetros da simulação

Máx. Número de Iterações	100000
Máx. Incremento de Tempo	1.0e-3
Convergência	1.0e-6
Máx. Iteração p/ Rotina da Pressão	100
Mín. Iteração p/ Rotina da Pressão	10
Distância média entre Partículas	1.0e-2
Raio de Interação (<i>Particle Number Density</i>)	2.1
Raio de Interação (<i>Laplaciano</i>)	4.0
Distância Mín. p/ colisão	0.5
Número <i>Dirichlet</i>	0.97

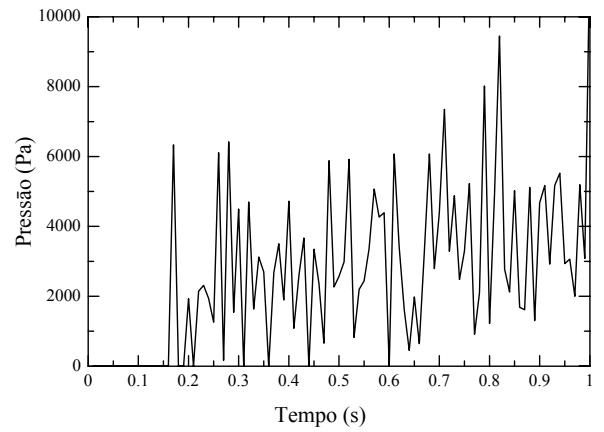
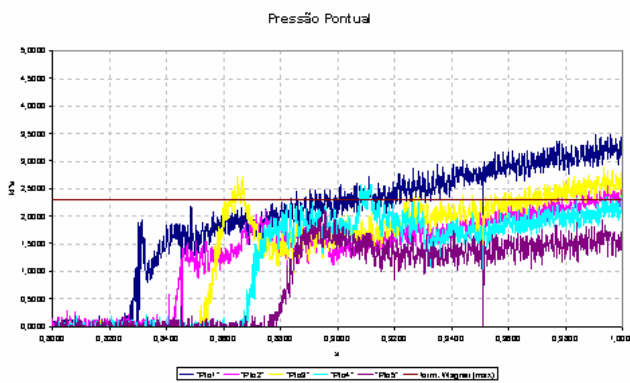


Posição 1



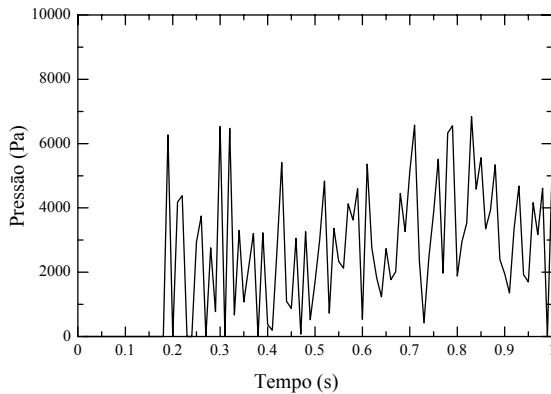
Posição 2

Figura 5: Comparação de uma imagem do procedimento experimental *versus* simulação numérica do fenômeno de impacto ($t = 0.400250$ seg)

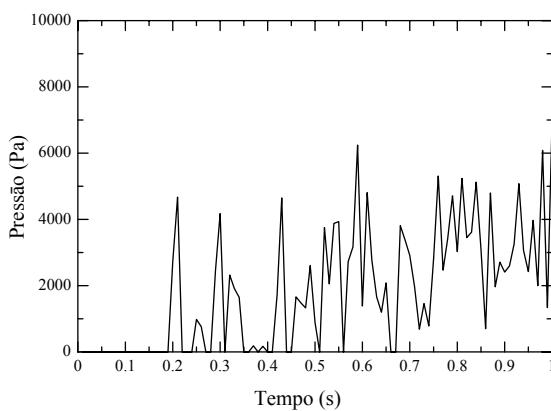


Posição 3

Figura 6: Série temporal da pressão de impacto - Cunha de $\beta=45^\circ$ - $\Delta h=0,05m$ - $V_{imp} = 1,15$ m/s - Miyagi (2003)



Posição 4



Posição 5

Figura 7: Resultados das simulações numéricas nas diferentes localizações Cunha de $\beta=45^\circ$ - $\Delta h=0,05m$ - $V_{imp} = 1,15 m/s$

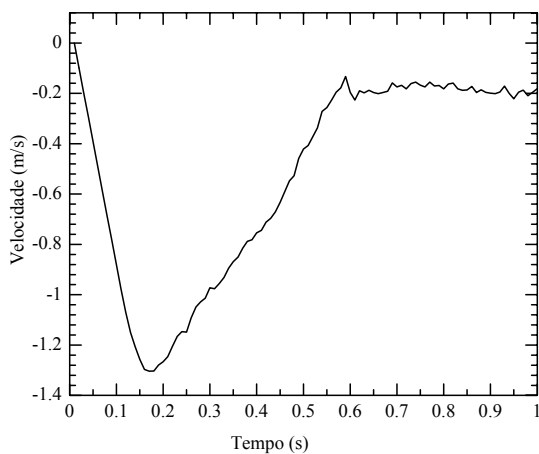


Figura 8: Velocidade de queda da cunha de 45° - $V_{imp} = 1.3 m/s$

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi utilizado um método de partículas proveniente do método MPS para a simulação do fenômeno de impacto hidrodinâmico. A técnica foi baseada em uma discretização dos operadores diferenciais, presentes nas equações de Navier-Stoke, utilizando modelos de interação entre partículas.

Estabelecendo um confronto visual entre a simulação numérica e a experimental na figura 5, observa-se a semelhança na fragmentação do fluido assim como na deformação da superfície livre. Comparando agora os resultados numéricos apresentados na figura 7, com os ensaios experimentais do procedimento validado por Miyagi (2003), pode-se observar alguma divergência nos valores picos das pressões, isto se deve as oscilações numéricas implícitas e próprias do método, mas pode-se concluir que a media dos valores acompanham os obtidos experimentalmente, figura 6. A velocidade de impacto, representada numericamente na figura 8, apresentou um erro em torno de 10% do valor do ensaio experimental.

A continuidade deste estudo concentra-se na extensão do método MPS a fim de reduzir as oscilações nos dados do cálculo das pressões nas partículas que representam sólidos.

REFERÊNCIAS

- [1] Gingold, A., Monaghan, J.J. "Smoothed particle hydrodynamic: theory and application to non-spherical stars". *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 181, 375-389, 1977.
- [2] Lucy, L.B., "A numerical approach to the testing of fusion process". *Astronomical Journal*, Vol. 88, pp. 1013-1024, 1977.
- [3] Monaghan J.J. e Gingold, R. A., "Shock simulation by the particle method SPH". *Journal of Computational Physics* Vol. 52, pp. 374-389, 1983.
- [4] Koshizuka, H. Tamako, e Y. Oka, "A particle method for simulating incompressible Viscous Flow". *Proc. Extended Abstract 3rd. World Congress Computational Mechanics (WCCM III)*, p. 1880, Chiba, Japan, 1994
- [5] Koshizuka, H. Tamako e Y. Oka, "A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation". *Comput. Fluid Dynamics, J.*, 4, 29, 1995.
- [6] Koshizuka S. e Oka Y., "Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid". *Nucl Eng Science* 123, 421-434, 1996.
- [7] Miyagi, Carlos, "Análise experimental e numérica de impacto hidrodinâmico bidimensional". *Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP*, 2003.