

Funções quaterniônicas transcendententes e relação De Moivre

J.B.J.Maricato^{1,*}, M.F.Borges^{1,}, J.M.Machado^{1,***}**

1 - Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP.

* e-mail: josemaricato@yahoo.com.br

** e-mail: Borges@ibilce.unesp.br

*** e-mail: Jmarcio@ibilce.unesp.br

Resumo

No estudo da dilatação $H(x) \leq K < \infty$ de uma função k-quaseconforme com domínio $D \subset H$, H é o conjunto hipercomplexo, teve-se inicialmente a necessidade de obter uma generalização de x^n , $x \in H$, usando as relações de Moivre.

Como x é da forma $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, calcular x^n para $n=2,3,..$ foi a motivação inicial desse trabalho.

Sobre as dilatações $H(x)$, elas são obtidas quando calculamos $|f(y) - f(x)|$, $x, y \in D$ e $f(x) = x^n$, na condição $|x - y| = r > 0$; o ponto x é fixo e y está na fronteira de uma bola de raio r e centro em x.

Resultados iniciais observados indicam uma pequena dilatação em direção à parte vetorial imaginária, que aqui apenas mencionaremos à título de ilustração.

Palavras chave:

Funções hipercomplexas, funções quaseconformes, relação De Moivre em quaterniões.

Introdução

Seja

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ reais}\}$$

o conjunto dos números hipercomplexos que podem ser escritos na forma algébrica $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x$ onde x_1 é sua parte real que denotaremos por $\text{Re}(x)$ e h_x sua parte vetorial imaginária $I(x)$. As regras de multiplicação para o grupo quaterniônico são

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$il = li = i, \quad j1 = 1j = j, \quad k1 = 1k = k.$$

que podem ser visualizadas facilmente pela tabela

| | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| . | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| 1 | 1 | -1 | i | -i | j | -j | k | -k |
| -1 | -1 | 1 | -i | i | -j | j | -k | k |
| i | i | -i | -1 | 1 | k | -k | -j | j |
| -i | -i | i | 1 | -1 | -k | k | j | -j |
| j | j | -j | -k | k | -1 | 1 | i | -i |
| -j | -j | j | k | -k | 1 | -1 | -i | i |
| k | k | -k | j | -j | -i | i | -1 | 1 |
| -k | -k | k | -j | j | i | -i | 1 | -1 |

Uma função hipercomplexa com domínio $D \subset H$ pode ser escrita como

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) + jf_3(x) + kf_4(x),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Sejam então D e D' domínios no n-espaço Euclidiano R^n ($n \geq 2$) e $f: D \rightarrow D'$ um homeomorfismo. Se $x \in D$

e $r > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B}(X, r) \subset D$ e

$$L(x, r) = \max_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|, \quad l(x, r) = \min_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|$$

$$H(x, r) = \frac{L(x, r)}{l(x, r)}, \quad H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r)$$

Diremos que a função f é k-quaseconforme se a dilatação $H(x)$ é uniformemente limitada em D e $1 \leq H(x) \leq k < \infty$ quase sempre.

O desenvolvimento de x^n .

Seja $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x$,

h_x é a parte vetorial dada por $h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4$, usando as leis da multiplicação temos

$h_x^2 = -x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ como um número real. Para $k \in \mathbb{N}$,

h_x^{2k} é real e $h_x^{2k+1} = h_x h_x^{2k} = h_x^{2k} h_x$ imaginário da forma $h_x^{2k}(ix_2 + jx_3 + kx_4) = ix_2 h_x^{2k} + jx_3 h_x^{2k} + kx_4 h_x^{2k}$.

$$\begin{aligned} \text{Então } x^n &= (x_1 + h_x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} h_x^k = \\ &= \binom{n}{0} x_1^n h_x^0 + \binom{n}{2} x_1^{n-2} h_x^2 + \dots + \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\binom{n}{1} x_1^{n-1} h_x^1 + \binom{n}{3} x_1^{n-3} h_x^3 + \dots + \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k}}_{\text{Real}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1}}_{\text{Imaginário}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k}}_{\text{Real}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \cdot h_x}_{\text{coeficiente da parte vetorial}} \\ &= \text{Re}(x^n) + I(x^n). \end{aligned}$$

O fator h_x^{2k} pode ser calculado da forma

$$\begin{aligned} h_x^{2k} &= (h_x^2)^k = [-x_2^2 + (-x_3^2 - x_4^2)]^k = \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-x_2^2)^p (-x_3^2 - x_4^2)^{k-p} \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-x_2^2)^p \left[\sum_{l=0}^{k-p} \binom{k-p}{l} (-x_3^2)^l (-x_4^2)^{k-p-l} \right] \end{aligned}$$

Exemplos e aplicações

Exemplo: x^2 ,

$$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x$$

Usando tabela

| | | | | |
|-------------------|------------|------------|------------|------------|
| $x^2 = x \cdot x$ | x_1 | ix_2 | jx_3 | kx_4 |
| x_1 | x_1^2 | $ix_1 x_2$ | $jx_1 x_3$ | $kx_1 x_4$ |
| ix_2 | $ix_1 x_2$ | $-x_2^2$ | | |
| jx_3 | $jx_1 x_3$ | | $-x_3^2$ | |
| kx_4 | $kx_1 x_4$ | | | $-x_4^2$ |

Pela fórmula

$$\text{Re}(x^2) = \sum_{k=0}^{2k \leq 2} \binom{2}{2k} x_1^{2-2k} h_x^{2k} = x_1^2 + h_x^2,$$

$$I(x^2) = h \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq 2} \binom{2}{2k+1} x_1^{2-(2k+1)} h_x^{2k} \right] = 2h_x x_1,$$

$$\text{logo } x^2 = x_1^2 + h_x^2 + 2x_1 h_x.$$

Exemplo: x^3 , $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x$

Usando tabela

| | | | | |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x^3 = x^2 \cdot x$ | x_1 | ix_2 | jx_3 | kx_4 |
| x_1^2 | x_1^3 | $ix_1^2 x_2$ | $jx_1^2 x_3$ | $kx_1^2 x_4$ |
| $-x_2^2$ | $-x_1 x_2^2$ | $-ix_2^3$ | $-jx_2^2 x_3$ | $-kx_2^2 x_4$ |
| $-x_3^2$ | $-x_1 x_3^2$ | $-ix_2 x_3^2$ | $-jx_3^3$ | $-kx_3^2 x_4$ |
| $-x_4^2$ | $-x_1 x_4^2$ | $-ix_2 x_4^2$ | $-jx_3 x_4^2$ | $-kx_4^3$ |
| $2ix_1 x_2$ | $2ix_1^2 x_2$ | $-2x_1 x_2^2$ | | |
| $2jx_1 x_3$ | $2jx_1^2 x_3$ | | $-2x_1 x_3^2$ | |
| $2kx_1 x_4$ | $2kx_1^2 x_4$ | | | $-2x_1 x_4^2$ |

Pela fórmula

$$\text{Re}(x^3) = \sum_{k=0}^{2k \leq 3} \binom{3}{2k} x_1^{3-2k} h_x^{2k} = x_1^3 + 3x_1 h_x^2,$$

$$I(x^3) = h \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq 3} \binom{3}{2k+1} x_1^{3-(2k+1)} h_x^{2k} \right] =$$

$$(3x_1^2 + h_x^2) h_x$$

logo,

$$x^3 = x_1^3 + 3x_1 h_x^2 + (3x_1^2 + h_x^2) h_x.$$

Uma aplicação

Considere estudar a dilatação $H(x)$ na bola

$\overline{B}(x, r) \subset D$, onde $f(x) = x^2$ sendo dados:

$$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + h_x \text{ fixo}$$

$$y = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 = y_1 + h_y, \text{ na fronteira da}$$

bola fechada $\overline{B}(x, r)$, que escrito em coordenadas

(r, θ) vale:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + r \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 = x_1 + rc_1c_2c_3 \\
y_2 &= x_2 + r \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 = x_2 + rc_1c_2s_3 \\
y_3 &= x_3 + r \cos\theta_1 \sin\theta_2 = x_3 + rc_1s_2 \\
y_4 &= x_4 + r \sin\theta_1 = x_4 + rs_1
\end{aligned}$$

Temos ainda que $h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4$,

$$h_x^2 = -x_2^2 - x_3^2 - x_4^2,$$

$$h_y = iy_2 + jy_3 + ky_4,$$

$$h_y^2 = h_x^2 - 2r\Pi + r^2(c_1^2c_2^2c_3^2 - 1), \text{ onde}$$

$\Pi = x_2c_1c_2s_3 + x_3c_1s_2 + x_4s_1$, então:

$$|f(y) - f(x)| = |y_1^2 - x_1^2 + h_y^2 - h_x^2 + 2y_1h_y - 2x_1h_x|$$

que desenvolvida fica

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{Ar^4 + Br^3 + Cr^2}, \text{ e}$$

$$C = x_1^2 - h_x^2c_1^2c_2^2c_3^2 + \Pi^2, \text{ assim}$$

$$H(x) = \frac{\max \sqrt{C}}{\min \sqrt{C}}.$$

Conclusão

A instrumentação x^n desenvolvida para estudo de potências quaterniônicas, apesar de sua simplicidade, torna os cálculos menores e pelos exemplos e aplicações dados convencemo-nos de sua boa utilidade.

Referências

- [1] Bieberbach, L.; Conformal mapping., Clelsea Publishing Company. New York.1953.
- [2] Machado, J.M; Borges, M.F, New remarks on the differentiability of hypercomplex functions, *International Journal of Applied Mathematics*, 8:(1) (2002), 85-101.
- [3] Machado, J.M; Borges, M.F, Hypercomplex Functions, *International Journal of Applied Mathematics*, 9(1) (2002), 27-38.
- [4] Rickman, Seppo; Quasiconformal Mappings, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae., Series A . I. Mathematica*, Volumen 13, (1988), 371 - 385.
- [5] Spiegel, Murray Ralph.; Variáveis Complexas, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, (1973), Coleção Schaum.