Estabilidade de Métodos Numéricos para Escoamentos com Superfícies Livres*

Cassio M. Oishi, José A. Cuminato,
Departamento de Ciências de Computação e Estatística, ICMC-USP,
13251-900, Caixa Postal 668, São Carlos, SP
E-mail: oishi@icmc.usp.br, jacumina@icmc.usp.br

Este trabalho considera a estabilidade de métodos numéricos na solução das equações de Navier-Stokes em escoamentos com superfícies livres. Em forma adimensional, essas equações são escritas como

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla p + \\ &Re^{-1}\nabla^2\mathbf{u} + (Fr^2)^{-1}\mathbf{g} \quad \text{em} \quad [0,T]\times\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad [0,T]\times\Omega, \tag{2}$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidade, p é a pressão, $\mathbf{g}$ é o campo gravitacional, Re é o número de Reynolds, Fr é o número de Froude, $[0,T]$ é um intervalo de tempo dado, e $\Omega \subset \Re^2$ um domínio. Além das condições de contorno em fronteiras rígidas, é necessária a imposição de condições de contorno na superfície livre. Portanto as condições de contorno são definidas como

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_2, \\ (\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_2, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\partial\Omega_1$ é o contorno rígido (contorno de parede) e $\partial\Omega_2$ é a superfície livre. Nas equações em $\partial\Omega_2$, o vetor normal é definido como $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ e o tangencial $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$, e a tensão superficial é nula. Substituindo o tensor total $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$, com $\boldsymbol{\tau}$ o tensor tensão e $\mathbf{I}$ o tensor identidade, nas equações (4) obtêm-se em forma bidimensional cartesiana

$$\begin{aligned} &-p + \frac{2}{Re}\left[\frac{\partial u}{\partial x}n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}n_y^2 + \right. \\ &\left.\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x n_y\right] = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial u}{\partial x}n_x m_x + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_y m_y + \\ &\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right](n_y m_x + n_x m_y) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Condições de contorno nas entradas ($\partial\Omega_3$) e saídas ($\partial\Omega_4$) de fluidos também podem ser preescritas. Elas são dadas por

$$u_n = u_{\text{entrada}} \quad \text{e} \quad u_\tau = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_3, \tag{7}$$

$$p = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_4, \tag{8}$$

onde u_n é a velocidade normal ao contorno e u_τ é a velocidade tangencial ao contorno.

As equações (1) e (2) podem ser discretizadas no tempo da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^{(n+1)} - \theta_1\delta t Re^{-1}\nabla^2\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^n + \\ &\delta t\left\{-\theta_2\nabla\cdot(\mathbf{uu})^n + \theta_3\nabla\cdot(\mathbf{uu})^{(n-1)} - \right. \\ &\left.\nabla p^{(n+1)} + (Fr^2)^{-1}\mathbf{g}^n\right\} + \theta_4\delta t Re^{-1}\nabla^2\mathbf{u}^n, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^{(n+1)} = 0, \tag{10}$$

onde os parâmetros θ_1, θ_2, θ_3 e θ_4 são determinados conforme o esquema de discretização temporal escolhido.

Uma dificuldade na resolução numérica das equações de Navier-Stokes é que a velocidade e a pressão estão acopladas pela restrição de incompressibilidade, isto é, pela equação (2). Uma estratégia para resolver essa dificuldade surgiu na década de 60, com os métodos de projeção. O primeiro método de projeção foi desenvolvido por Chorin[4]. A idéia básica desses métodos é usar uma velocidade intermediária na equação de quantidade de movimento (1). Essa velocidade intermediária geralmente não satisfaz a restrição de incompressibilidade (2). Então a velocidade intermediária é projetada para produzir um campo de velocidade que satisfaça a equação (2) e um campo gradiente. Essa formulação matemática é baseada na decomposição de Helmholtz-Hodge [7, 5].

O método de projeção procura uma solução para (9), primeiro resolvendo a equação

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{u}} - \theta_1\delta t Re^{-1}\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \\ &\delta t\left\{-\theta_2\nabla\cdot(\mathbf{uu})^n + \theta_3\nabla\cdot(\mathbf{uu})^{(n-1)} - \right. \\ &\left.\nabla q + (Fr^2)^{-1}\mathbf{g}^n\right\} + \theta_4\delta t Re^{-1}\nabla^2\mathbf{u}^n, \end{aligned} \tag{11}$$

para uma velocidade intermediária $\tilde{\mathbf{u}}$. A tabela 1 apresenta os possíveis valores dos parâmetros θ.

A velocidade $\tilde{\mathbf{u}}$ geralmente não satisfaz a equação (10). Na equação (11) considera-se uma aproximação para a pressão q. Usando a decomposição

*Apoio financeiro FAPESP

Tabela 1: Esquemas de discretização temporal. Ex: Explícito, Im: Euler implícito, CN: Crank-Nicolson, e AB/CN: Adams-Bashforth/Crank-Nicolson.

Método	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
Ex	0	1	0	1
Im	1	1	0	0
CN	0.5	1	0	0.5
AB/CN	0.5	1.5	0.5	0.5

de Helmholtz-Hodge, pode-se escrever a velocidade intermediária como

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(n+1)} + \nabla\psi, \tag{12}$$

onde $\mathbf{u}^{(n+1)}$ satisfaz a equação (10). Aplicando o divergente na equação (12) e utilizando a equação (10) tem-se a equação de Poisson

$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \tag{13}$$

As condições de contorno necessárias para resolver a equação (13) são

- Condição de contorno do tipo Neumann para paredes rígidas, isto é,

  $$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0.$$

  Esta condição de contorno também será utilizada nas entradas de fluidos.

- Condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea para as saídas de fluidos, ou seja,

  $$\psi = 0.$$

- Condições de contorno nas superfícies livres: Assim como em [12], as condições de contorno para ψ nas superfícies livres são determinadas quando a equação (5) torna-se implícita, ou seja, pode-se reescrever esta equação como

  $$-p^{n+1} + \frac{2}{Re}\left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}n_x^2 + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}n_y^2 + \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}\right)n_x n_y\right] = 0. \tag{14}$$

  Note que esta equação acopla os campos de velocidades e pressão no nível de tempo $(n+1)$, e a solução deste sistema linear pode ocasionar dificuldades computacionais. Oishi et al. [12] apresenta uma estratégia para solucionar o problema do acoplamento da equação (14). A equação (14) depende do vetor normal $\mathbf{n}$, e desta forma, as condições de contorno da equação (13) para ψ são determinadas conforme os valores de n_x e n_y.

A variável q pode representar aproximações diferentes para a pressão p. Os trabalhos [10, 9, 2, 3, 8] propõem formas distintas para q. Neste trabalho, assumimos $q = \tilde{p}$. Desta forma a pressão é atualizada como

$$p^{(n+1)} = \tilde{p} + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t}. \tag{15}$$

Uma dificuldade adicional, na resolução numérica das equações de Navier-Stokes, aparece se os escoamentos envolvem superfícies livres, pois a presença desses contornos apresenta problemas como: a configuração da superfície livre deve ser determinada a cada passo no tempo e o movimento da superfície livre é geralmente influenciado por fenômenos interfaciais. Apesar desses inconvenientes existem vários métodos disponíveis na literatura especializada para se resolver a classe dos problemas com superfícies livres. A maioria desses esquemas foram influenciados pelo método proposto em [6], o conhecido método MAC ("Marker-And-Cell").

O método GENSMAC ("GENeralized Simplified Marker-And-Cell") desenvolvido por [13] é uma extensão do método MAC e utiliza um esquema explícito na discretização dos termos viscosos da equação de quantidade de movimento (11). Entretanto, a formulação explícita utilizada pelo método GENSMAC requer um número elevado de ciclos computacionais e, como resultado, pode consumir grande quantidade de memória, tempo de processamento elevado e bastante espaço de armazenamento. Esses problemas ocorrem, freqüentemente, em simulações onde o valor do número de Reynolds é baixo ($Re << 1$) ou quando o refinamento da malha é necessário para se obter uma solução numérica melhor, pois o passo temporal δt se torna muito pequeno. O valor de δt se torna muito restrito devido à condição parabólica de estabilidade imposta pelos métodos explícitos, que envolvem o número de Reynolds e o espaçamento da malha. Uma alternativa para resolver esse inconveniente é aplicar formulações implícitas. Uma versão semi-implícita do método MAC foi proposto por Armênio [1], e chamada de SIMAC ("Semi-Implicit-Marker-And-Cell"). O SIMAC utiliza um esquema implícito na discretização dos termos viscosos da equação (11). Entretanto, Armênio considera a pressão na superfície livre igual a zero, ou seja, a equação (5) se reduz a $p = 0$. Uma versão modificada do método GENSMAC foi proposta por Oishi et al.[11] e não realiza simplificações nas equações das superfícies livres. Neste método, o esquema explícito utilizado em [13] é substituído por esquemas implícitos. Porém, no trabalho proposto em [11], os esquemas implícitos apresentaram-se condicionalmente estáveis, e em muitos casos o passo temporal alcançado em problemas com superfícies livres com baixo número de Reynolds é próximo ao método original explícito GENSMAC. Portanto, a estabilidade numérica de esquemas implícitos requer atenção especial quando estes são aplicados a escoamentos com superfícies livres com $Re << 1$. Num recente trabalho, Oishi et al. [12] apresentaram um estudo da estabilidade numérica do método de Euler implícito em problemas com superfícies livres. Os resultados apresentados em [12] mostram que o esquema de Euler implícito tornase condicionalmente estável, se a equação para a pressão na superfície livre (5) é tratada explicitamente. Desta forma, Oishi et al. [12] propõem uma estratégia para tornar implícita a equação (5), obtendo um método semi-implícito incondicionalmente estável. Entretanto, o esquema utilizado na discretização dos termos viscosos é de primeira ordem de precisão temporal.

Este trabalho tem como objetivo estender as idéias aplicadas por [12] e apresentar um estudo sobre a estabilidade numérica dos esquemas de Euler Implícito, e os métodos de segunda ordem de precisão temporal, Crank-Nicolson e Adams-Bashforth/Crank-Nicolson. A discretização temporal das condições de contorno em fronteiras rígidas para a equação (11) influência diretamente a estabilidade numérica de um método semi-implícito, como será apresentado.

Referências

[1] V. Armenio, An improved MAC method (SIMAC) for unsteady high-reynolds free surface flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*,**24** (1997), 185-214.

[2] J.B. Bell, P. Colella e H.M. Glaz, A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, **85** (1989), 257-283.

[3] D.L. Brown, R. Cortez e M.L. Minion, Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, **168** (2001), 464-499.

[4] A.J. Chorin, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, **22** (1968), 745-762.

[5] F. M. Denaro, On the applications of the Helmoltz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **43** (2003), 43-69.

[6] F.H. Harlow e J.E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, **8** (1965), 2182-2189.

[7] W. V. D. Hodge, The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge University Press, Cambridge, (1952).

[8] R.D. Guy e A.L. Fogelson, Stability of approximate projection methods on cell-centered grids, *Journal of Computational Physics*, **203** (2005), 517-538.

[9] J.V. Kan, A second order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow, *SIAM, J. Sci. Stat. Comput*, **7** (1986), 870-891.

[10] J. Kim e P. Moin, Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, **59** (1985), 308-323.

[11] C.M. Oishi, V.G. Ferreira, J.A. Cuminato, A. Castelo, M.F. Tomé e N. Mangiavacchi, Implementing implicit schemes in GENSMAC, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **5** (2004), 257-266.

[12] C.M. Oishi, J.A. Cuminato, V.G. Ferreira, M.F. Tomé, A. Castelo e N. Mangiavacchi, A stable semi-implicit method for free surface flows, *Journal of Applied Mechanics*, submetido em 2005.

[13] M.F. Tomé e S. McKee, GENSMAC: A computational marker-and-cell method for free surface flows in general domains, *Journal of Computational Physics*, **110** (1994), 171-186.