# Solução ELTA$_N$ para o Problema de Transporte com Fonte

**Augusto V. Cardona**
Faculdade de Matemática, Pontifícia Universidade Católica
Av. Ipiranga, 6681, prédio 15, 90619-900, Porto Alegre-RS-Brasil
E-mail: acardona@pucrs.br

**José V. P. de Oliveira**
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria
Av. Roraima, s/n, prédio 13, 97105-900, Santa Maria-RS- Brasil
E-mail: josepol@smail.ufsm.br

Em 1997, Cardona e Vilhena [1] propuseram uma nova abordagem para resolver problemas de transporte, denominada método LTA$_N$. Esse procedimento consiste na aplicação da transformada de Laplace no conjunto das equações A$_N$, resolução do sistema linear resultante para o fluxo angular transformado e inversão da transformada de Laplace do fluxo angular. Em 2003, Cardona et al. [2] apresentaram outra versão do método LTA$_N$. Essa formulação permitiu que fossem resolvidos problemas de transporte com alto grau de anisotropia. Com o objetivo de diminuir o esforço computacional, recentemente, Cardona, Vasques e Vilhena [3] propuseram uma nova versão do método LTA$_N$, denominada ELTA$_N$. Neste trabalho estendemos essa formulação para solução de problemas de transporte não-homogêneos.

Para obter a nova formulação LTA$_N$, denominada ELTA$_N$, inicialmente reescrevemos as equações A$_N$ com fonte [4] na forma matricial e aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial, resultando:

$$s\bar{\mathbf{u}}(s) = \mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{v}}(s) + \bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{O}}(s) \tag{1}$$

e

$$s\bar{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{C}\bar{\mathbf{u}}(s) + \bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{E}}(s) \tag{2}$$

Substituindo a equação (1) em (2), depois de algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\begin{aligned}(s^2 I - \mathbf{BC})\bar{\mathbf{u}}(s) &= \\ & s\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{v}(0) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{E}}(s) + s\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{O}}(s)\end{aligned} \tag{3}$$

Visando inverter a transformada de Laplace, aplicamos a diagonalização da matriz produto **BC**, isto é, fazemos $\mathbf{BC} = \mathbf{XDX}^{-1}$, onde **X** denota a matriz dos autovetores e **D** é a matriz diagonal contendo os autovalores de **BC**. Utilizando propriedades da transformada de Laplace, após a solução da Eq. (3) e inversão da transformada de Laplace, obtemos:

$$\begin{aligned}u(x) = X(&e^{D^{1/2}(x-a)}\Delta + e^{D^{1/2}x}\Gamma + \\ &\int_a^x e^{D^{1/2(x-\tau)}}F(\tau)d\tau + \int_0^x e^{-D^{1/2}(x-\tau)}G(\tau)d\tau)\end{aligned} \tag{4}$$

e

$$\begin{aligned}v(x) = CXD^{1/2}(&e^{D^{1/2}(x-a)}\Delta - e^{-D^{1/2}x}\Gamma + \\ &\int_a^x e^{D^{1/2}(x-\tau)}F(\tau)d\tau - \int_0^x e^{-D^{1/2}(x-\tau)}G(\tau)d\tau)\end{aligned} \tag{5}$$

onde

$$\mathbf{F}(x) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{X}^{-1}\mathbf{S}_{\mathbf{O}}(x) + \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}_{\mathbf{E}}(x)\right] \tag{6}$$

e

$$\mathbf{G}(x) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{X}^{-1}\mathbf{S}_{\mathbf{O}}(x) - \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}_{\mathbf{E}}(x)\right] \tag{7}$$

e os vetores desconhecidos $\Delta$ e $\Gamma$ são obtidos pela aplicação das condições de contorno.

Com o objetivo de mostrar a eficiência sob o ponto de vista computacional da formulação ELTA$_N$ comparada à da formulação LTA$_N$ apresentamos uma simulação numérica para um problema de transporte com fonte e altas ordens de quadratura. Vamos considerar o problema de transporte numa placa com espessura a = 1, fluxo incidente $f(\mu_k) = 0$ em x = 0 e vácuo em x = 1, com o termo de fonte

$$S(x,\mu) = \frac{\sigma_s}{2}\sum_{k=0}^{L}\beta_k P_k(\mu)P_k(\mu_0)\, e^{-x/\mu_0}, \tag{8}$$

com $\mu_0 = 0.5$, espalhamento anisotrópico L = 299, com $\beta_l$ assumindo os valores considerados em Gonçalves et al. [5], $\sigma_t$ = 1 e $\sigma_s$ = 0.95. Na tabela 1, apresentamos resultados para as formulações LTA$_N$ e ELTA$_N$ para o fluxo escalar em x = 0 e em x = 1, com N variando de 200 a 400. Observando a tabela 1, podemos verificar a coincidência de seis algarismos significativos nos resultados obtidos pelas duas formulações.

| Método | Fluxo Escalar em x = 0 | Fliuxo Escalar em x = 1 | Tempo (s) |
|---|---|---|---|
| $LTA_{200}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 29.93 |
| $LTA_{250}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 59.72 |
| $LTA_{300}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 98.83 |
| $LTA_{350}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 156.23 |
| $LTA_{400}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 247.91 |
| $ELTA_{200}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 5.09 |
| $ELTA_{250}$ | $1.115932\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 9.38 |
| $ELTA_{300}$ | $1.115931\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 15.26 |
| $ELTA_{350}$ | $1.115931\times10^{-1}$ | $3.484059\times10^{-1}$ | 23.68 |
| $ELTA_{400}$ | $1.115931\times10^{-1}$ | $3.484060\times10^{-1}$ | 36.24 |

Tabela 1: Resultados numéricos para o fluxo escalar pelos métodos $LTA_N$ e $ELTA_N$
($L = 299$, $a = 1$, $\sigma_s = 0.95$, $\sigma_t = 1.0$)

Levando em conta os valores obtidos na última coluna da Tabela 1, acreditamos que em problemas não homogêneos também ocorre uma redução significativa no tempo de processamento quando utilizamos a nova versão do método $LTA_N$, denominada $ELTA_N$.

# Referências


[l] Cardona, A. V.; Vilhena, M. T., Analytical Solution for the $A_N$ Approximation, *Annals of Nuclear Energy*, 24, (1997) 495-505.

[2] Cardona, A. V.; Vilhena, M. T.; Oliveira J. V. P. de; Vasques, R. The one-dimensional $LTA_N$ solution in a slab with high order of quadrature, em "Proceedings of 18th International Conference on Transport Theory", pp. 260-264, 2003.

[3] Cardona, A. V.; Vilhena, M. T.; Vasques, R. Uma Nova Versão do Método $LTA_N$, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 5, nº 1, (2004) 49-54.

[4] Cardona, A. V.; Pazos, R. P.; Vilhena, M. T. The State-of-the-art of the $LTA_N$ Method, em "ICONE 12 - 12th International Conference on Nuclear Energy", 2004.

[5] Gonçalves, G. A.; Segatto, C. F.; Vilhena, M. T. The $LTS_N$ Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 66, (2000) 271-276.