Caos e pertubação periódica no modelo de duas espécies

Leandro Santos Ribeiro, **Elinei Pinto dos Santos**[*],
Depto de Matemática, PPGE,CCEN, UFPA,
66075110, Belém, PA
E-mail: leandrosrb@yahoo.com.br, elinei@ufpa.br,

1 Introdução

A dinâmica de população na biologia matemática tem diversos contextos de aplicações, especificamos no trabalho de Lotka-Volterra e de verhust para as interações do tipo predador-presa que é apresentado como o exemplo na dinâmica das populações que apresenta o comportamento cíclico[4] . Os processos estudados no modelo aborda as interações da população em competição intra-especifica tanto na presa como no predador. Dinâmica no modelo é sujeitada a consideráveis flutuações sazonais e aos ataques naturais dos inimigos. A perturbação periódica é aplicada em dois parâmetros do modelo: na taxa do natalidade da presa e na taxa de mortalidade do predador. Conseqüentemente, o forçamento no sistema gera uma dinâmica que pode exibir comportamento caótico[1-4].

O modelo incorpora mecanismos de auto-regulação nas equações, representando o crescimento populacional da equação logística de Verhust. A competição é uma composição de mecanismos que podem produzir regulação na população tornando a dinâmica populacional embutidas nos modelos mais próximas dos sistemas naturais; as teorias da competição tratada por ecologistas e matemáticos, como mecanismo de regulação entre espécies tem uma larga abordagem e teorias a seu respeito [4]. Considera-se neste trabalho que competição entre espécies ocorra em termos de duas espécies interagindo sobre limitação de recursos, isto é, proporcionado uma densidade-dependente.

2 O modelo

O modelo explorado neste trabalho não é uma situação real, mas sim um primeiro passo para uma boa aproximação de uma iteração mais complexa, através da introdução de um fator de competição entre as espécies (equação logística) e um parâmetro de variação sazonal aplicado na taxa de natalidade da presa. A estrutura geral do modelo presa-predador e de competição são :

$$x'_k(t) = x_k(t)(a_k(t) - \sum_{i=1}^{N} b_{kl}x_i), k = 1, 2, \cdots, N, N \geq 1. \tag{1}$$

$$x'_k(t) = x_k(t)(a_k(t) + \sum_{i=1}^{N} b_{kl}x_i), k = 1, 2, \cdots, N, N \geq 1. \tag{2}$$

Particularizando o sistema para duas espécies, tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = rx - kf(x,y) - g(x), \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = hf(x,y) - \mu y - g(y). \tag{4}$$

Onde x é o número de presa, y o número de predador, f(x,y) a função de iteração presa-predador do próprio modelo de Lotka-Volterra, g(x) e g(y) a função de competição e r, k, h e d são constantes reais e positivas.

$$\frac{dx}{dt} = rx - kxy - \delta x^2, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} = hxy - \mu y - \phi y^2. \tag{6}$$

Nós transformamos o sistema (3), (4) pela intoduzindo as variáveis não dimensionais.

$$T = rt,\ X_1 = \frac{\delta}{r}x\ , X_2 = \frac{\phi k}{hr}x. \tag{7}$$

Então as constantes não-dimensional do sistema

$$a = \frac{h}{\delta},\ d = \frac{\mu}{r},\ b = \frac{h}{k}. \tag{8}$$

Agora o sistema equivalente pode ser escrito

$$\frac{dX_1}{dT} = X_1(1 - X_1) - X_1X_2, \tag{9}$$
$$\frac{dX_2}{dT} = aX_1X_2 - bX_2^2 - dX_2. \tag{10}$$

---
[*]bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

$$\frac{dX_1}{dT} = X_1(1 - X_1) - X_1X_2, \quad (11)$$

$$\frac{dX_2}{dT} = aX_1X_2 - bX_2^2 + dX_2. \quad (12)$$

Agora nós implementaremos forçamento periódico no modelo em consequência da variação sazonal. Nós escolhemos modificar especificamente modelo das equações (5) e (6), onde nós substituiremos para:

$$r(t) = g_0 + g(1 - cos(\omega t)) \quad (13)$$

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta(1 - cos(\omega t)) \quad (14)$$

Onde g e ω são constantes positivas , usando (9), nós simulamos o ecosssistema predador-presa para a dinâmica de interações entre espécies, que incorpora flutuações periódicas regulares e com a sazonalidade flutuações irregulares. Assim, sistema de equações predador-presa ganha a forma:

$$\frac{dX_1}{dT} = X_1(1 - X_1) - X_1X_2 + g(1 - cos(\omega t))X_1 \quad (15)$$

$$\frac{dX_2}{dT} = aX_1X_2 - bX_2^2 - g(1 - cos(\omega t))X_2 \quad (16)$$

$$\frac{dX_1}{dT} = X_1(1 - X_1) - X_1X_2 + g(1 - cos(X_3t))X_1, \quad (17)$$

$$\frac{dX_2}{dT} = aX_1X_2 - bX_2^2 - g(1 - cos(X_3t))X_2, \quad (18)$$

$$\frac{dX_3}{dT} = \omega. \quad (19)$$

With $X_3 = 0$.

3 Métodos de Análise

A técnica do cáculo do expoente de lyapunov é uma ferramenta poderosa que serve para distinguir os atratores individuais, a partir da convergência ou divergência exponencial no comportamento de trajetórias vizinhas no espaço de fase. Um atrator para um sistema dissipativo com um ou mais expoente de lyapunov é dito ser caótico. Os expoentes de Lyapunov avaliam a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas, e representa um dos critérios mais importantes utilizados para definir o caos em sistemas dinâmicos.

Para a natureza qualitativa das soluções espaço de fase usou-se a seção de Poincaré, na obteção dos diagramas de bifurcações. Através dele podemos perceber, ciclos limite, soluções quase-periódcas, dublicação de período e caos.

4 Resultados Numéricos

Encontrou-se que o forçamento periódico no modelo de Lotka-Volterra de tempo contínuo pode produzir uma dinâmica com comportamento caótico. A trajetória caótica do sistema $(9 - 10e11 - 12)$ é percebida na figura 1 e 2, respectivamente. Usou-se as condições iniciais, $X_1 = 0.02$ e $X_2 = 0.2$ com passo de integração 5.10^{-3}. Atribuindo diversos valores para os parâmetros. Tomou-se $a = 5.0, b = 0.1$. Na figura 3, mostra-se o Expoente de Lyapunov para o sistema dissipativo (9-10), o que ocorre que a soma dos expoentes é negativa. O expoentes de Lyapunov possitivo caracteriza a sensibilidade às condições iniciais, que nos leva a conclusão de solução caótica nas flutuações sazonais das interações predador-presa. NA figura 4 a dinâmica global do atrator 1 e 2, é mostrado pelos seus respectivos diagramas de bifurcações. Conseguentemente, na fig.5. verifica-se para que valores o parâmetro da taxa de mortalidade do predador tem-se soluções caóticas, e em seguida, mostra-se o diagrama de bifurcação da amplitude do forçamento.

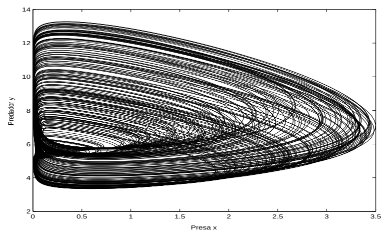

Figura 1: Espaço de fase do modelo presa-predador de Lotka-Volterra com variação sazonal

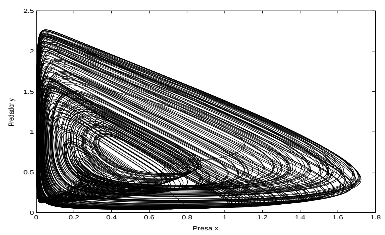

Figura 2: Atrator estranho do modelo de competição entre espécies

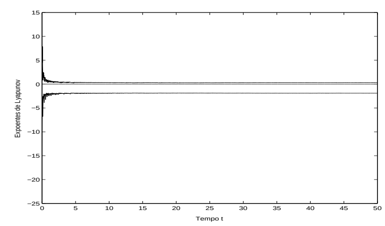

Figura 3: Atrator estranho do modelo de competição entre espécies

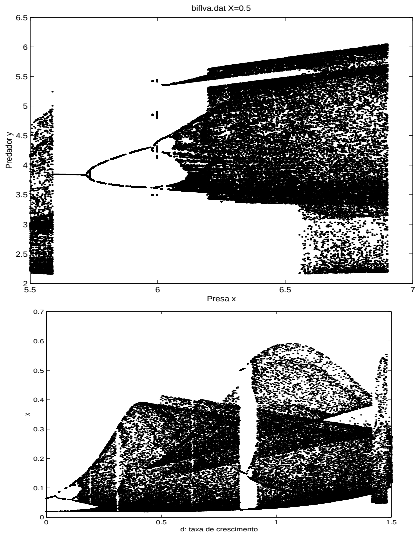

Figura 4: Diagrama de bifurcação

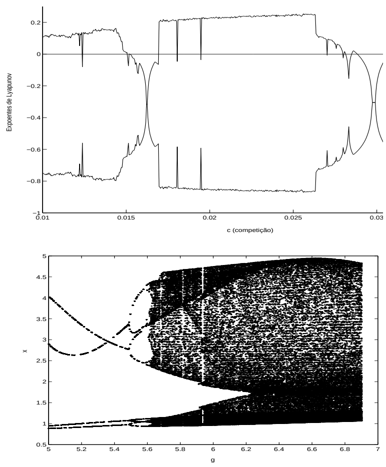

Figura 5: Expoente de Lyapunov e Diagrama de Bifurcação

5 conclusão

A dinâmica do sistema presa-predador com sazonalidade destacou-se com solução caótica provando sua sensibilidade às condições iniciais, produzindo uma variedade de comportamentos. O diagrama da bifurcação fornece um sumário do comportamento dinâmico essencial do sistema. Certamente os pontos que são traçados representam bem as regiões de atração podendo incluir o caos, ocorrendo a duplicação de período.

Referências

[1] G.C.W. Sabin and D. Summer. Chaos in a periodically forced predator-prey ecosystem model. Math. Biosci. 113 (1993), pp. 91-113.

[2] G. Sunita, N. R. Kamel. “Chaos in seasonally perturbed ratio-dependent prey-predator system”, Chaos, Solitons and Fractals, V.15,(2003), 107-118.

[3] G. Sunita, N. R. Kamel, Seasonally perturbed prey-predator system with predator-dependent functional response Chaos, Solitons and Fractals, V. 18, (2003), 1075-1083.

[4] RIBEIRO, L.S.; COSTA, L. P. Da; PEREIRA, W. D. C.; SANTOS, P. dos S.; Chaos and seasonal variation analysis in Lotka-Volterra. IV BIOMAT(2004).ILHEUS-BA.

[5] OTT, Edward. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge, New York, 1993.