

# Movimento Rotacional de Satélites Artificiais, Livre de Torques Externos, em Variáveis Canônicas Não-Singulares

**Leonardo Simal Moreira, Maria Cecília F. P. S. Zanardi**

GRUPO DE DINÂMICA ORBITAL E PLANETOLOGIA

FEG – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

UNESP – Universidade Estadual Paulista

Rua Ariberto Pereira da Cunha, 333 – CEP 12516-410 – Guaratinguetá – SP – Brasil

Tel.: (12) 3123 2863 Fax: (12) 3123 2845

e-mail: [Leosimal@aol.com](mailto:Leosimal@aol.com); [cecilia@feg.unesp.br](mailto:cecilia@feg.unesp.br)

Neste trabalho é analisado um conjunto de variáveis canônicas não-singulares para o movimento rotacional definidas por Fukushima (1993). Este conjunto mostra-se útil quando o ângulo  $J$  entre o eixo  $OC$  de um sistema de coordenadas fixo no satélite e o vetor momento angular de rotação é zero ou muito próximo de zero. São deduzidas as equações para o movimento rotacional livre de torques externos (MRLTE) nestas variáveis. Pela sua análise é possível concluir que, embora as equações tenham soluções gerais mais complexas do que para outros conjuntos de variáveis, é possível obter soluções aproximadas adequadas quando o ângulo  $J$  é pequeno. Deve-se ressaltar ainda a vantagem de que tais variáveis são canônicas e possuem significado físico.

## Nomenclatura

$A, B, C$  – momentos principais de inércia do satélite;

$OABC$  - sistema fixo no centro de massa do satélite e que têm eixos nas direções de seus momentos principais de inércia;

$OXYZ$  – sistema inercial;

$\vec{S}$  - vetor momento angular de rotação;

$OX'Y'Z'$  – sistema do momento angular de rotação, com  $OZ'$  na direção de  $\vec{S}$ ;

$(L, G, H, l, g, h)$  - conjunto das variáveis canônicas de Andoyer;

$(\Psi, \Xi, H, \psi, \xi, h)$  - conjunto das variáveis canônicas não-singulares;

MRLTE – movimento rotacional livre de torques externos.

## Introdução

As variáveis de Andoyer [4] representam um conjunto de variáveis canônicas para o estudo do movimento rotacional.

Estas variáveis  $(L, G, H, l, g, h)$  são mostradas na Figura 1, em que  $O$  é o centro de massa do satélite,

$OABC$  é o sistema com eixos nas direções dos momentos principais de inércia do satélite,  $OXYZ$  é o sistema inercial e  $OX'Y'Z'$  é o sistema do momento angular de rotação, com  $OZ'$  na direção de  $\vec{S}$ .

Embora as variáveis canônicas de Andoyer sejam úteis para estudos teóricos do movimento rotacional geral, elas apresentam limitações. Especificamente, surgem algumas dificuldades quando se lida com pequenas inclinações, como quando o ângulo  $J$  entre o eixo  $OC$  e o vetor momento angular de rotação é zero ou muito próximo de zero. Estas dificuldades são causadas por uma aparente singularidade devida a uma escolha não apropriada de variáveis.

Uma maneira de contornar tais dificuldades está em usar outras variáveis canônicas, obtidas por uma transformação de dimensão dois utilizada por Fukushima ([2], [3]), aplicada ao conjunto das variáveis de Andoyer.

## Transformação de Fukushima

Considere a seguinte transformação:

$$F : (X, Y, x, y) \Rightarrow (U, V, u, v),$$

em que

$$\begin{aligned} U &= X \\ V &= \sqrt{X^2 - Y^2} \operatorname{sen} y \\ u &= x + \tan^{-1} \left( \frac{Y}{X} \tan y \right) \\ v &= \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{X^2 - Y^2}}{Y} \cos y \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Aqui assume-se a condição  $|X| \geq |Y|$ , que assegura que as novas variáveis são reais. É fácil mostrar que  $F$  é canônica, utilizando os colchetes de Poisson das novas variáveis  $(U, V, u, v)$  [2]. Os resultados encontrados são

$$\{U, u\} = \{V, v\} = 1, \{U, V\} = \{U, v\} = \{V, u\} = \{u, v\} = 0 \quad (2)$$



No que segue, as equações do MRLTE são analisadas para os casos  $J = 0$  e  $J \approx 0$ , utilizando-se dados de um satélite fictício de pequeno porte, e soluções analíticas são obtidas para dois momentos principais de inércia iguais ( $A=B$ ) e também para momentos principais de inércia diferentes ( $A \neq B$ ). Será determinada também a solução numérica para o conjunto das equações de forma a validar a solução analítica aproximada (a solução numérica das equações, bem como alguns resultados analíticos foram obtidos com o auxílio do software MAPLE V).

## Equações do movimento rotacional

Utilizando-se a Hamiltoniana dada por (8) em (9), as equações do movimento para  $A \neq B$  são expressas por [1]:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) (\Psi^2 - \Xi^2) \cos \xi \sin \xi \quad (13)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\Psi}{B} \sin^2 \xi + \frac{\Psi}{C} \cos^2 \xi \quad (14)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = - \left( \frac{\Xi}{B} \sin^2 \xi + \frac{\Xi}{C} \cos^2 \xi - \frac{\Xi}{A} \right) \quad (15)$$

Pelas equações (10), (11) e (12) observa-se que as variáveis  $\Psi$ ,  $H$  e  $h$  permanecem constantes, devido à ausência de torques externos.

Para o caso  $A = B$ , as equações (13), (14) e (15) se reduzem a

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) (\Psi^2 - \Xi^2) \cos \xi \sin \xi \quad (16)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi \cos^2 \xi + \frac{\Psi}{A} \quad (17)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = - \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Xi \cos^2 \xi \quad (18)$$

## Soluções

Se  $J = 0$ , tem-se por (7) que  $\xi = 0$  e  $\Xi = 0$ . As equações são simplificadas e as soluções obtidas são as mesmas para os dois casos (tanto  $A = B$  quanto  $A \neq B$ ), ou seja,

$$\Psi = \Psi_0 \quad (19)$$

$$H = H_0 \quad (20)$$

$$h = h_0 \quad (21)$$

$$\Xi = \Xi_0 \quad (22)$$

$$\Psi(t) = \frac{\Psi_0}{C} t + \Psi_0 \quad (23)$$

$$\xi = \xi_0 \quad (24)$$

em que  $\Psi_0, H_0, h_0, \Xi_0, \Psi_0, \xi_0$  são constantes associadas com as condições iniciais do problema. Nota-se que neste caso apenas o ângulo  $\psi$  varia linearmente com o tempo, sendo esta variação associada ao movimento de rotação do satélite.

Se  $J \approx 0$ , tem-se que  $\xi \approx 0$  e  $\Xi \approx 0$ . Neste caso serão adotadas as aproximações:  $\sin \xi \approx \xi$  e  $\cos \xi \approx 1$ , sendo desprezados termos da ordem de  $\xi^2$  e  $\Xi^2$ . As soluções obtidas são as seguintes:

1º caso:  $A = B$

$$\Psi = \Psi_0 \quad (25)$$

$$H = H_0 \quad (26)$$

$$h = h_0 \quad (27)$$

$$\Xi(t) = D \sin(kt + \phi) \quad (28)$$

$$\Psi(t) = \frac{\Psi_0}{C} t + \Psi_0 \quad (29)$$

$$\xi(t) = \frac{D}{\Psi_0} \cos(kt + \phi) \quad (30)$$

em que

$$k = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0 \quad (31)$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\Xi_0}{\Psi_0 \xi_0} \right) \quad (32)$$

$$D = \sqrt{\Xi_0^2 - \Psi_0^2 \xi_0^2} \quad (33)$$

2º caso:  $A \neq B$

A solução geral das eqs. (13), (14) e (15) é habitualmente apresentada por meio de funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas. No entanto, para pequenos valores de  $J$ , é possível obter soluções aproximadas bem mais simples. Neste caso, com as aproximações sugeridas anteriormente, as equações para  $\Xi$ ,  $\Psi$ , e  $\xi$  tornam-se

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \Psi^2 \xi \quad (34)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\Psi}{C} \quad (35)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = - \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Xi \quad (36)$$

e as soluções são:

$$\Psi = \Psi_0 \quad (37)$$

$$H = H_0 \quad (38)$$

$$h = h_0 \quad (39)$$

$$\Xi(t) = \Xi_0 \cos(Kt) + \frac{ACK}{A-C} \xi_0 \sin(Kt) \quad (40)$$

$$\Psi(t) = \frac{\Psi_0}{C} t + \Psi_0 \quad (41)$$

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(Kt) + \frac{C-A}{ACK} \Xi_0 \sin(Kt) \quad (42)$$

em que

$$K = \frac{\Psi_0}{C} \sqrt{\frac{AB-AC-BC+C^2}{AB}} \quad (43)$$

Comparando-se (29) e (41), verifica-se que a solução para  $\Psi$  é a mesma para  $A = B$  e  $A \neq B$ .

## Resultados

As soluções obtidas previamente para as equações do movimento foram implementadas para os casos em que  $J \approx 0$ . Os casos em que  $J = 0$  são bem simples e não necessitam de maiores comentários.

Nas implementações a seguir, são utilizados dados relacionados a um satélite fictício de pequeno porte, no instante inicial  $t_0 = 0s$ , e os resultados são apresentados graficamente através de comparações das soluções analíticas e numéricas para as variáveis  $\Xi$ ,  $\Psi$  e  $\xi$ .

1º caso:  $A = B$

$$A = 10,67 \text{ kg.m}^2$$

$$B = 10,67 \text{ kg.m}^2$$

$$C = 11,06 \text{ kg.m}^2$$

$$J \approx 0,0087 \text{ rad}$$

$$G = 58,0583 \text{ kg.m}^2/s$$

$$H = 58,0569 \text{ kg.m}^2/s$$

$$L = 58,0561 \text{ kg.m}^2/s$$

$$g = 1,1497 \text{ rad}$$

$$h = 1,3905 \text{ rad}$$

$$l = \pi/2 \text{ rad}$$

Foram obtidas soluções numéricas das eqs. (16), (17) e (18) para as variáveis  $\Xi$ ,  $\Psi$  e  $\xi$ . O método utilizado foi o Runge-Kutta de 4ª ordem, realizado pelo software MAPLE V.

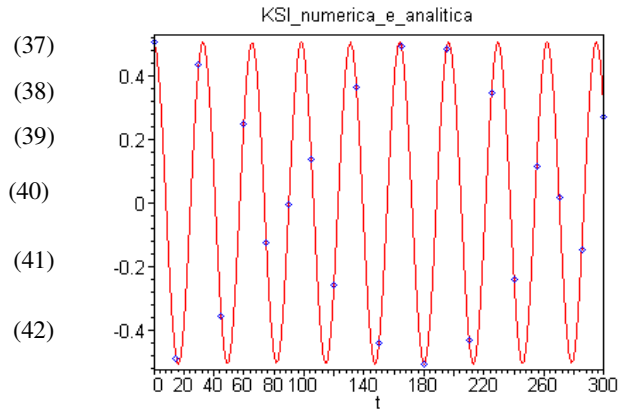


Figura 2: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a variável  $\Xi$ , quando  $A = B$ , para um tempo de 300s.

(— analítica; \* numérica)

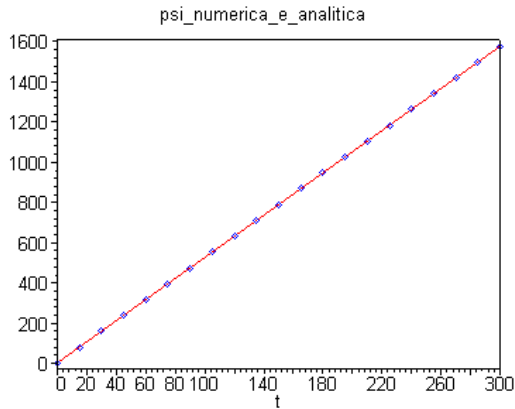


Figura 3: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a variável  $\psi$ , quando  $A = B$ , para um tempo de 300s.  
(— analítica; \* numérica)

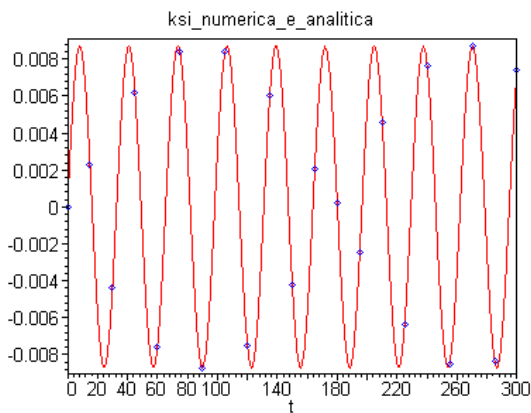


Figura 4: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a variável  $\xi$ , quando  $A = B$ , para um tempo de 300s.  
(— analítica; \* numérica)

Pelas Figuras 2, 3 e 4, válidas para  $A = B$ , observam-se variações periódicas em  $\Xi$  e  $\xi$  e variação linear em  $\psi$ , e a concordância entre as soluções numéricas e as soluções analíticas aproximadas. As diferenças entre as soluções são da ordem de  $10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>/s para  $\Xi$ ,  $10^{-6}$  rad para  $\xi$  e  $10^{-3}$  rad para  $\psi$ , no instante 300s.

2º caso:  $A \neq B$

$$A = 10,67 \text{ kg.m}^2$$

$$B = 10,90 \text{ kg.m}^2$$

$$C = 11,06 \text{ kg.m}^2$$

$$J \approx 0,0087 \text{ rad}$$

$$G = 58,0583 \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

$$H = 58,0569 \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

$$L = 58,0561 \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

$$g = 1,1497 \text{ rad}$$

$$h = 1,3905 \text{ rad}$$

$$l = \pi/2 \text{ rad}$$

Foram obtidas soluções numéricas das eqs. (13), (14) e (15) para as variáveis  $\Xi$ ,  $\psi$  e  $\xi$ . O método utilizado foi o Runge-Kutta de 4ª ordem, realizado pelo software MAPLE V.

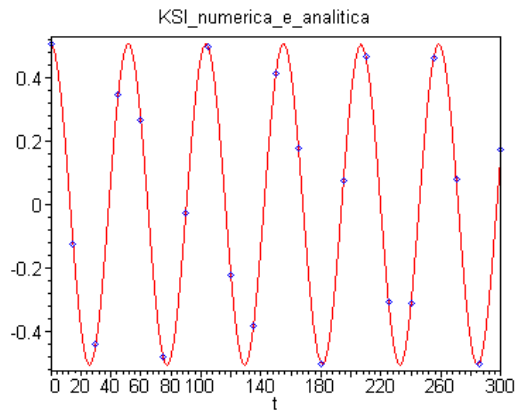


Figura 5: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a variável  $\Xi$ , quando  $A \neq B$ , para um tempo de 300s.  
(— analítica; \* numérica)

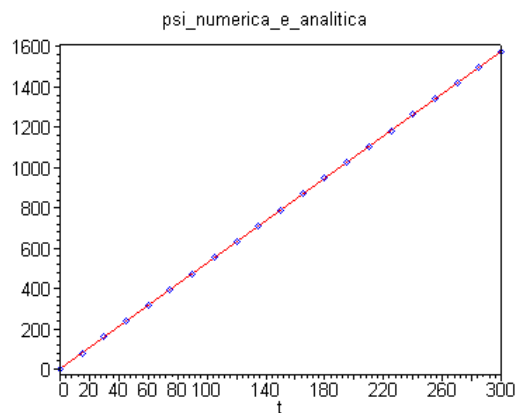


Figura 6: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a variável  $\psi$ , quando  $A \neq B$ , para um tempo de 300s.  
(— analítica; \* numérica)

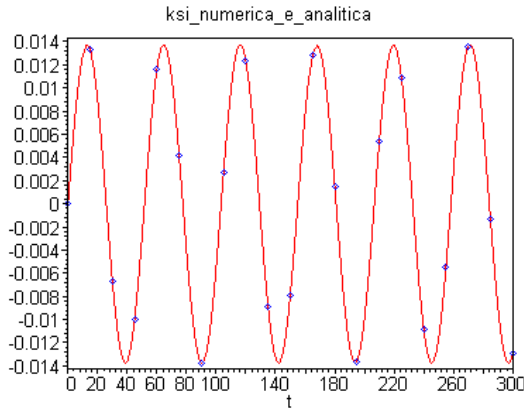


Figura 7: Comparação entre as soluções numérica e analítica para a variável  $\xi$ , quando  $A \neq B$ , para um tempo de 300s.  
(— analítica; \* numérica)

Pelas Figuras 5, 6 e 7, válidas para  $A \neq B$ , observam-se variações periódicas em  $\Xi$  e  $\xi$  e variação linear em  $\Psi$ , e a concordância entre as soluções numéricas e as soluções analíticas aproximadas. As diferenças entre as soluções são da ordem de  $10^{-3}$  kg.m<sup>2</sup>/s para  $\Xi$ ,  $10^{-5}$  rad para  $\xi$  e  $10^{-3}$  rad para  $\psi$ , no instante 300s.

## Conclusão

As variáveis de Andoyer, embora úteis no estudo do movimento rotacional, mostram-se inadequadas em situações em que se lida com pequenos valores do ângulo  $J$ . Uma maneira de contornar esta dificuldade é utilizar as variáveis de Fukushima, obtidas a partir das variáveis de Andoyer por meio de uma transformação canônica. A vantagem do uso das variáveis de Fukushima reside nos seguintes fatos:

- 1) são variáveis canônicas;
- 2) são não-singulares, isto é, mostram-se bem definidas mesmo quando  $J \approx 0$  ( $L \approx G$ );
- 3) possuem significado físico, com as variáveis métricas estando associadas com o módulo do momento angular de rotação ( $\Psi$ ) e suas projeções no eixo principal de inércia  $x$  ( $\Xi$ ) e no eixo inercial  $Z$  ( $H$ ), e as variáveis angulares sendo ângulos que relacionam os sistemas de referência envolvidos.

Em relação a desvantagens, as equações do MRLTE são mais complicadas que em outros conjuntos de variáveis, sendo a solução geral

expressa em termos de funções especiais (funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas). Afortunadamente, para pequenos valores de  $J$  é possível obter soluções aproximadas das equações em formas bem mais simples.

Para o MRLTE verifica-se que o módulo do momento angular de rotação e sua componente no eixo inercial OZ permanecem constantes, enquanto sua componente no eixo principal de inércia OA possui variações periódicas.

Quanto às variáveis angulares, definidas na Figura 1, verifica-se que  $h$  permanece constante no MRLTE, enquanto  $\xi$  apresenta variações periódicas e  $\psi$  variação linear, estando esta última associada ao movimento de rotação do satélite.

Nas comparações realizadas neste trabalho mostra-se a concordância entre as soluções analíticas e numéricas para pequenos valores da inclinação  $J$ .

## Referências

- [1] A. P. Araújo, Análise do Movimento Rotacional de Satélites Artificiais Utilizando Variáveis Não-Singulares. *Guaratinguetá, Outubro 1999. 90p. Relatório de Pesquisa de Iniciação Científica PIBIC.*
- [2] T. Fukushima, New Canonical Variables for Orbital and Rotational Motion, *Publicação da Sociedade Astronômica do Japão*, (1993) 100-130.
- [3] T. Fukushima, New Canonical Variables for Orbital and Rotational Motion, *Celestial Mechanics*, v. 60 (1994) 51-68.
- [4] M. C. Zanardi, Attitude Propagation Using Non-Singular Canonical Variables, *Advances in the Astronautical Sciences*, v.98-344 (1998) 551-564.