

# Uma Metodologia Integrada para Otimização de Forma em Escoamentos de Fluidos

**Lindaura Maria Steffens, Marcelo Krajnc Alves**

Depto de Engenharia Mecânica, POSMEC, GMAC, UFSC,  
Campus Universitário, Trindade, Caixa Postal 476, 88040-900, Florianópolis, SC  
E-mail: [lindaura@emc.ufsc.br](mailto:lindaura@emc.ufsc.br), [krajnc@emc.ufsc.br](mailto:krajnc@emc.ufsc.br),

As aplicações de otimização de forma em problemas de fluidos são inúmeras e estão presentes em diversas áreas da engenharia, são especialmente importantes nas áreas da engenharia aeroespacial e automobilística, no projeto de válvulas e bombas hidráulicas. Na prática, a engenharia esta interessada em reduzir o arraste na asa de um avião ou em automóveis, ou então, diminuir a perda de carga em canais, em válvulas hidráulicas, cardiovasculares, etc.

Este trabalho propõe um procedimento numérico integrado para problemas que envolvem a otimização de forma aplicada ao escoamento de fluidos. O procedimento é denominado integrado porque reúne diversos módulos distintos para o tratamento do problema, tais como: modelagem geométrica, geração de malhas por elementos finitos, análise não-linear do escoamento, análise de sensibilidade, programação matemática e otimização de forma.

## 1. Equação de Navier-Stokes

**Formulação Forte:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e  $\Gamma$  o seu contorno. O problema consiste em determinar  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  e  $p(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$ , tais que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) - 2\nu \nabla \cdot D(\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathbf{b} \text{ em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ em } \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{u}$  o vetor velocidade,  $p$  a pressão,  $\nu$  a viscosidade dinâmica,  $\rho$  a massa específica,  $D(\cdot)$  a parte simétrica do operador gradiente e  $\mathbf{b}$  o vetor de força do corpo.

As equações em (1) estão sujeitas às condições de contorno de Dirichlet e Neumann, dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_{\mathbf{u}}, \\ 2\nu D(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\rho} p \mathbf{n} &= \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_{\mathbf{t}}, \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $\Gamma_{\mathbf{u}}$  e  $\Gamma_{\mathbf{t}}$  são as regiões do contorno com o campo de velocidade prescrito e tensão prescrita, respectivamente.

**Formulação Fraca:** Define-se os conjuntos:

$$\text{Kinu} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_{\mathbf{u}} \right\},$$

$$\text{Kinp} = \left\{ p \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$\text{Varu} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_{\mathbf{u}} \right\}$$

$\text{Varp} = \left\{ \hat{p} \in L^2(\Omega) \right\}$ , onde os espaços  $H^1$  e  $L^2$  são definidos em [7].

A partir destas definições, aplicando o Método de Galerkin, apresenta-se a forma integral ponderada do problema, dada por:

Determinar  $(\mathbf{u}, p) \in \text{Kinu} \times \text{Kinp}$ , tais que:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot D(\mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{b} \right\} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \\ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} \right\} \cdot \hat{p} \, d\Omega = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, \hat{p}) \in \text{Varu} \times \text{Varp}. \end{aligned}$$

Adicionando o termo de captura de descontinuidade, com o objetivo de trabalhar com elevados números de Reynolds, e aplicando o teorema da divergência [1], as condições de contorno definidas em (2), e simplificações matemáticas, pode-se apresentar a formulação fraca como:

$$B(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, \hat{p}) = F(\mathbf{v}, \hat{p}), \quad \forall (\mathbf{v}, \hat{p}) \in \text{Varu} \times \text{Varp},$$

sendo

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, \hat{p}) &= \left\langle (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} + 2\nu \left\langle D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v}) \right\rangle_{\Omega} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left\langle p, \text{div}(\mathbf{v}) \right\rangle_{\Omega} - \frac{1}{\rho} \left\langle \text{div}(\mathbf{u}), \hat{p} \right\rangle_{\Omega} \\ &\quad + \left\langle \text{div}(\mathbf{u}), \delta \text{div}(\mathbf{v}) \right\rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (3)$$

$$F(\mathbf{v}, \hat{p}) = \left\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Omega} + \left\langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Gamma_{\mathbf{t}}}, \quad (4)$$

onde  $\left\langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \right\rangle_{\Omega} = \iint_{\Omega} \{ f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \} \, d\Omega$  é definido como produto interno de quaisquer funções arbitrárias  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$ . O parâmetro  $\delta$  no termo de captura de descontinuidade é definido em [3].

**Formulação Discreta (MEF<sup>2</sup>):** O domínio  $\Omega$  é “aproximadamente” particionado em elementos  $\Omega_e$ , nos quais os campos de velocidade e pressão são interpolados como:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_u] \mathbf{q}_e^u, \quad \mathbf{v} = [\mathbf{N}_v] \mathbf{q}_e^v \quad \text{e} \quad p = [\mathbf{N}_p] \mathbf{q}_e^p$$

onde  $[\mathbf{N}_i]_{i=u,v,p}$  é o vetor que contém as funções de interpolações elementares e  $\mathbf{q}_e^u$ ,  $\mathbf{q}_e^v$  e  $\mathbf{q}_e^p$  representam os vetores de velocidades e pressões nodais.

Os termos obtidos acima nas Eqs. (3) e (4) são discretizados elemento à elemento da malha via o elemento T7/C3.

Uma vez computadas as contribuições de cada elemento na formulação fraca discretizada do problema (veja em [6]), faz com que os vetores e matrizes elementares dêem lugar as matrizes e vetores globais, da seguinte forma:

$$\mathbf{q} \leftarrow \bigcup_{e=1}^{ne} \mathbf{q}_e,$$

$$[\mathbb{K}(\mathbf{q})] \leftarrow \mathbf{A} \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{k}_e^{vuu}(\mathbf{u})] + [\mathbf{k}_e^v] - \\ [\mathbf{k}_e^{press}] - [\mathbf{k}_e^{press}]^T + [\mathbf{k}_e^b] \end{array} \right\},$$

$$[\mathbb{F}^{ext}] \leftarrow \mathbf{A} \left\{ [\mathbb{F}_e^b] + [\mathbb{F}_e^t] \right\},$$

sendo  $ne$  o número de elementos e  $\mathbf{A}$  um operador *assembly*, responsável pela montagem da matriz de rigidez e o vetor de força globais. Note que o termo  $[\mathbf{k}_e^{vuu}(\mathbf{u})]$  é dependente de  $(\mathbf{u})$ , ou seja, tem-se aqui um termo não linear em  $B(\cdot)$ .

Portanto, determina-se a equação de equilíbrio discretizada global:

$$[\mathbb{K}(\mathbf{q})] \mathbf{q} = [\mathbb{F}^{ext}] \quad (5)$$

Resultando no sistema não linear global, o qual é solucionado iterativamente com incremento do método de Newton.

Como consequência, se o algoritmo do método de Newton converge, tem-se  $\mathbf{q}^{solução}$ , a menos de uma tolerância, a solução do problema discretizado, onde  $\mathbf{q}^{solução}$  fornece os campos de velocidade  $(\mathbf{u})$  e pressão  $(p)$  convergidos.

## 2. Otimização

**Definição do Contorno:** Diversas técnicas podem ser utilizadas para a representação do contorno do

modelo de otimização, como o uso de polinômios ou macro-elementos, mas estas técnicas apresentam problemas de instabilidade numérica e distorções quando trabalhadas com geometrias complexas.

Um grande avanço foi obtido a partir da utilização das teorias de curvas paramétricas *splines* para definição do modelo geométrico. As representações destas curvas paramétricas provêm de uma definição matemática que facilita a manipulação e avaliação de pontos na curva, permitindo controle local e mudanças iterativas, além de requer poucos dados de entrada. As cúbicas com continuidade  $C^2$ , são as mais populares, pois satisfazem as necessidades da maioria dos problemas que surgem em aplicações práticas. Há várias representações como as curvas de Ferguson, Bezier e B-splines [4], [5].

Devido à simplicidade, neste trabalho, adotou-se as B-splines cúbicas, representadas de forma paramétrica como:

$$[\mathbf{p}(t)]^T = [p_x(t), p_y(t), p_z(t)] = [\mathbf{t}] [\mathbb{R}_{BS}] [\mathbf{b}_{BS}],$$

sendo

$$[\mathbb{R}_{BS}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{t}] = \{t^3 \ t^2 \ t \ 1\}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad [\mathbf{b}_{BS}] = \begin{Bmatrix} b_{i-1} \\ b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \end{Bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

onde  $b_{i-1}$ ,  $b_i$ ,  $b_{i+1}$  e  $b_{i+2}$  são os vetores posição dos vértices de controle  $B_{i-1}$ ,  $B_i$ ,  $B_{i+1}$  e  $B_{i+2}$  do polígono representativo que determina cada segmento da curva (ver Fig. 1), e  $(k-1)$  é número de segmentos da curva.

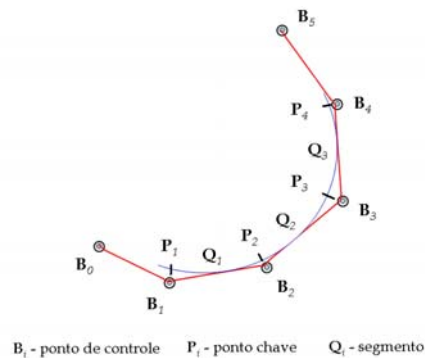


Figura 1. Segmento B-spline cúbica passando por um conjunto de pontos-chave  $(P_i)$ .

Define-se como variáveis de projeto, para o problema de otimização, o vetor dos pontos-chave, denotado por  $\mathbf{s}$ , o qual descreve o contorno do domínio, que é representado pelos segmentos das B-splines cúbicas.

**Função Objetivo:** A função objetivo a ser considerada é a dissipação viscosa, integrada sobre o domínio  $\Omega$  :

$$f(\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{s})), \mathbf{s}) = 2\nu \left\langle D(\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{s}))), D(\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{s}))) \right\rangle_{\Omega(\mathbf{s})}$$

$$= 2\nu \iint_{\Omega(\mathbf{s})} \{D(\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{s}))) \cdot D(\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{s})))\} d\Omega$$

sendo  $\nu$  a viscosidade dinâmica,  $D(\cdot)$  a parte simétrica do operador gradiente,  $\mathbf{u}$  o vetor velocidade,  $\mathbf{x}$  o vetor posição das variáveis de projeto e  $\mathbf{s}$  o vetor das variáveis de projeto.

Após a discretização por elementos finitos a função objetivo é dada por:

$$f(\mathbf{q}(\mathbf{s}), \mathbf{s}) = [\mathbb{K}^v(\mathbf{s})]\mathbf{q}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{s}) \quad (6)$$

Onde:

$$[\mathbb{K}^v(\mathbf{s})] = \sum_{e=1}^{ne} [\mathbb{k}_e^v(\mathbf{s})]$$

e  $\mathbf{q}(\mathbf{s})$  é o vetor contendo os campos de velocidade e pressão convergidos, solução do problema não linear do fluido.

**Definição do Problema Ótimo:** O problema de otimização consiste em determinar o valor ótimo das variáveis de projeto, tais que elas maximizem ou minimizem uma função objetivo, satisfazendo um conjunto de restrições. Neste trabalho é considerada como função objetivo à minimização da dissipação viscosa do escoamento e como variáveis de projeto as coordenadas dos pontos-chave, ambas definidas acima. Sendo o problema sujeito a restrições laterais e volumétricas.

O problema de otimização inicialmente pode ser formulado como:

Determinar  $\mathbf{s}$  solução de

$$\begin{cases} \min_{s/a} f(\mathbf{q}(\mathbf{s}), \mathbf{s}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq 0, \forall \mathbf{s} \in S, \end{cases}$$

onde  $S = \{\mathbf{s} \mid s_i^{\inf} \leq s_i \leq s_i^{\sup}\}$  representa as

restrições laterais,  $\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \Omega(\mathbf{s}) - \Omega^{\sup} \leq 0$  representa uma restrição volumétrica e  $\mathbf{q}(\mathbf{s})$  é solução do problema discretizado. Além disso,  $\mathbf{q}(\mathbf{s})$  impõem, de forma implícita, a equação de equilíbrio como uma restrição de igualdade.

Aplicando o método Lagrangeano Aumentado com Penalidade Exterior e introduzindo o conceito de variáveis de folga, transforma-se o problema original em uma seqüência de problemas de otimização laterais, como:

Determinar  $\mathbf{s}^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{s}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{s}_k^*$  onde  $\mathbf{s}_k^*$  é

solução do problema:

Dados  $\boldsymbol{\mu}^k \in \mathbb{R}^m$  e  $\varepsilon > 0$  determinar  $\mathbf{s}_k^*$  tal que seja solução de onde  $\mathbf{s}_k^*$  é solução do problema:

$$\begin{cases} \min_{s/a} \chi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}^k, \varepsilon^k) \\ \mathbf{s} \in S \end{cases}$$

onde

$$\chi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}^k, \varepsilon^k) = f(\mathbf{s}) + \frac{1}{2\varepsilon^k} \sum_{j=1}^m \Psi_j(g_j(\mathbf{s}), \varepsilon^k \boldsymbol{\mu}_j^k) \quad \text{com}$$

$$(g_j(\mathbf{s}), \varepsilon^k \boldsymbol{\mu}_j^k) = \begin{cases} [2\varepsilon^k \boldsymbol{\mu}_j^k + g_j(\mathbf{s})]g_j(\mathbf{s}) & \text{se } g_j(\mathbf{s}) \geq -\varepsilon^k \boldsymbol{\mu}_j^k \\ -(\varepsilon^k \boldsymbol{\mu}_j^k)^2 & \text{se } g_j(\mathbf{s}) < -\varepsilon^k \boldsymbol{\mu}_j^k \end{cases}$$

O vetor dos multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\mu}$  e o parâmetro de penalidade  $\varepsilon > 0$ , são reajustados de modo a obter a solução do problema inicial. A maneira de como é feita a atualização destes parâmetros pode ser vista em [6]. O critério de otimalidade a ser considerado para o problema de otimização é a satisfação das condições de Kuhn-Tucker [2].

**Análise de Sensibilidade:** Na análise de sensibilidade é investigada a taxa de mudança das quantidades de resposta do contorno em relação as variáveis de projeto, o que envolve o cálculo de gradientes de alguma função resposta, com respeito as variáveis de projeto. Geralmente estas funções são implícitas, não lineares, dependentes das variáveis de projeto, conseqüentemente são difíceis e caras de se calcular.

Seja a função objetivo, definida pela Eq. (6). Como  $f$  depende explicitamente e implicitamente das variáveis de projeto  $\mathbf{s}$ , o gradiente de  $f$  em relação a  $s_j$  é dado por:

$$\frac{df}{ds_j} = \frac{\partial f}{\partial s_j} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds_j}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (25)$$

As derivadas de  $f$  em relação a  $\mathbf{q}$  e  $s_j$  são simplesmente obtidas. É mais complicado determinar  $d\mathbf{q}/ds_j$ , que representa a sensibilidade do deslocamento nodal com relação a variação da variável de projeto  $s_j$ , pois para cada variável de projeto  $s_j$  é necessário solucionar o problema não linear do fluido, precisando assim, obter a convergência no método de Newton, o que se torna inviável. Uma alternativa para eliminar o cálculo deste termo, consiste em realizar uma operação denominada de método adjunto, na qual redefine-se a função objetivo como  $\hat{f}$ , introduzindo o vetor adjunto  $\boldsymbol{\lambda}$ , tal que a função objetivo modificada seja:

$$\hat{f} = f + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{R} \rangle,$$

sendo  $\mathbf{R}$  o vetor residuo definido na solução do problema não-linear do fluido. Assume-se que no equilíbrio  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , podendo escolher  $\lambda$  arbitrariamente, tal que  $\langle \lambda, \mathbf{R} \rangle = 0$ .

Agora, calculando o gradiente para a nova função objetivo  $\hat{f}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{ds_j} &= \frac{df}{ds_j} + \left\langle \lambda, \frac{d\mathbf{R}}{ds_j} \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial s_j} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}, \frac{d\mathbf{q}}{ds_j} \right\rangle + \left\langle \lambda, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_j} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{ds_j} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{q} = [\mathbf{K}_T]$ . Sendo  $[\mathbf{K}_T]$  a matriz de rigidez tangente obtida na solução do problema do fluido. O que nos permite escrever a Eq. (7) como:

$$\frac{d\hat{f}}{ds_j} = \frac{\partial f}{\partial s_j} + \left\langle \lambda, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \lambda [\mathbf{K}_T], \frac{d\mathbf{q}}{ds_j} \right\rangle, \quad (8)$$

Como  $\lambda$  pode ser escolhido arbitrariamente, para eliminar a necessidade de calcular o termo  $d\mathbf{q}/ds_j$ , escolhe-se  $\lambda$  de modo a resultar em um sistema de equações linear dado por:

$$[\mathbf{K}_T]^T \lambda = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}. \quad (9)$$

Inserindo a solução  $\lambda^*$  do sistema (9) na Eq. (8), obtm-se finalmente o gradiente da função objetivo modificada, dada por:

$$\frac{d\hat{f}}{ds_j} = \frac{\partial f}{\partial s_j} + \left\langle \lambda^*, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_j} \right\rangle, \quad j = 1, \dots, J.$$

Solucionar o sistema linear (9) para o vetor adjunto  $\lambda$  é computacionalmente barato, pois a matriz de rigidez tangente  $[\mathbf{K}_T]$  já foi calculada durante a solução do problema não linear do fluido.

### 3. Aplicações - Difusor Divergente

O difusor divergente configura-se como um escoamento incompressível em um canal, onde são prescritas as condições de contorno na entrada, parede, saída e fronteira de simetria do difusor. As situações a serem consideradas são as seguintes:

- Otimização da rampa de um difusor;
- Otimização da parede e do obstáculo no interior de um difusor.

O problema consiste em determinar a melhor forma da rampa, parede e do obstáculo, para que a

perda de carga do escoamento analisado seja mínima. A Figura 2 mostra os difusores a serem otimizados, enquanto a Fig. 3 apresenta a configuração do contorno para o problema de otimização, para os casos *a* e *b*.

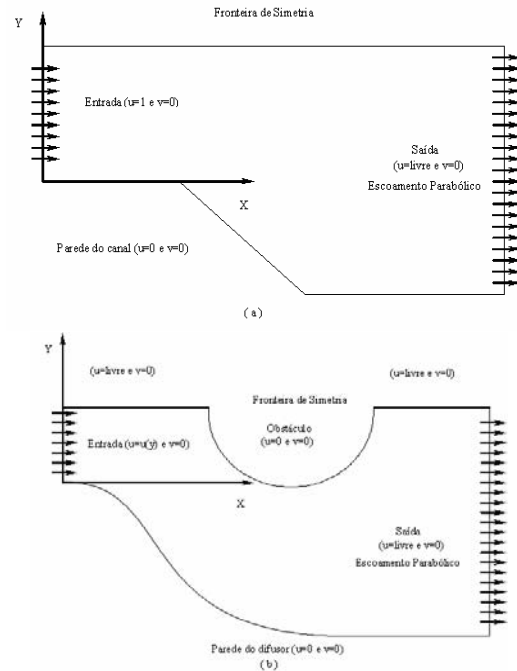


Figura 2. *a* - Difusor com rampa a ser otimizada. *b* - Difusor com parede e obstáculo a serem otimizados.

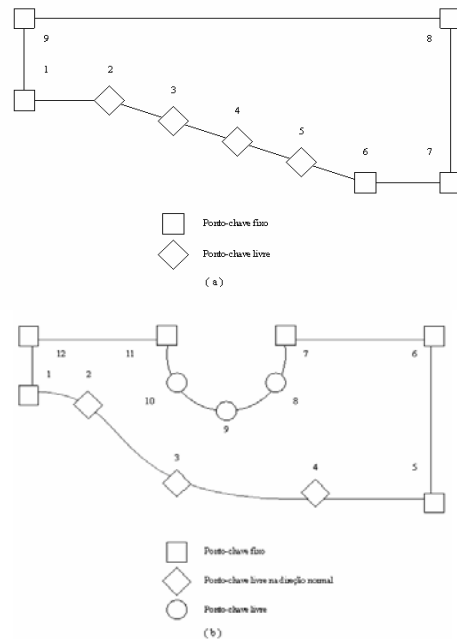


Figura 3. Configuração dos pontos-chave.

No caso *a* o contorno é descrito por 9 pontos-chave, 6 segmentos de B-splines, tendo 8 variáveis de projeto definidas para o problema de otimização, que correspondem aos graus de liberdade que os pontos-chave podem variar em determinada direção. No caso *b* o contorno é descrito por 12 pontos-chave, 6 segmentos de B-splines cúbicas e o problema têm 9 variáveis de

projeto. Note que as variáveis de projeto estão concentradas nos segmentos que representam as regiões à serem otimizadas.

A restrição volumétrica imposta para ambos os casos é de que o volume final na forma otimizada pode aumentar até 10 % do seu volume inicial. As restrições laterais para o caso *a* são dadas pela Tabela 1 e no caso *b* pela Tabela 2.

Restrição lateral em <i>x</i>	Restrição lateral em <i>y</i>
$0,93 \leq x_2 \leq 1,07;$	$-0,15 \leq y_2 \leq 0,1;$
$1,8133 \leq x_3 \leq 1,8533;$	$-0,4 \leq y_3 \leq -0,15;$
$2,6466 \leq x_4 \leq 2,6866;$	$-0,65 \leq y_4 \leq -0,4;$
$3,4799 \leq x_5 \leq 3,5199$	$-0,65 \leq y_4 \leq -0,4;$

Tabela 1: Restrições laterais caso *a*.

Restrição lateral em <i>x</i>	Restrição lateral em <i>y</i>
$6,9 \leq x_8 \leq 7,1;$	$-0,8 \leq y_2 \leq 0;$
$5,4 \leq x_9 \leq 5,6;$	$-2,5 \leq y_3 \leq -1,5;$
$3,9 \leq x_{10} \leq 4,1;$	$0,4 \leq y_8 \leq 0,7;$
	$-0,7 \leq y_9 \leq -0,3;$
	$0,4 \leq y_{10} \leq 0,7;$

Tabela 2: Restrições laterais caso *b*.

As análises de otimização de forma foram feitas para escoamentos submetidos a número de Reynolds 100 e a precisão solicitada para o método de Newton foi de  $10^{-4}$ .

Utilizou-se, para o caso *a* e *b*, malhas de 1957 e 774 elementos triangulares, respectivamente, as quais podem ser visualizadas na Fig. 4.

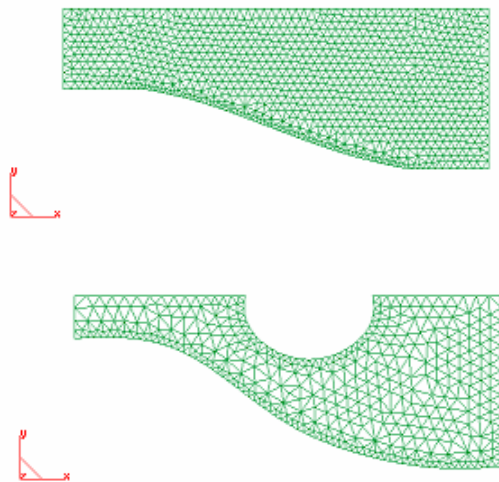


Figura 4. Malhas na configuração inicial.

A seguir são mostrados alguns resultados obtidos da simulação numérica para o difusor na configuração otimizada:

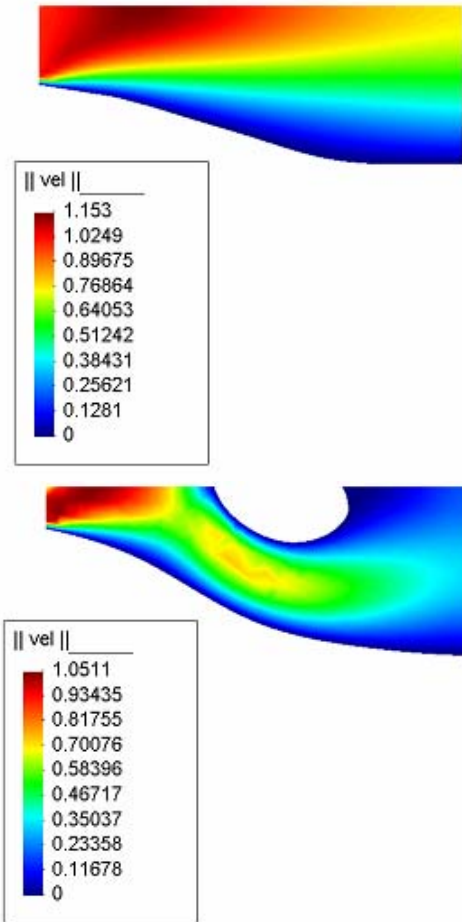


Figura 5. Norma Euclidiana do vetor velocidade.

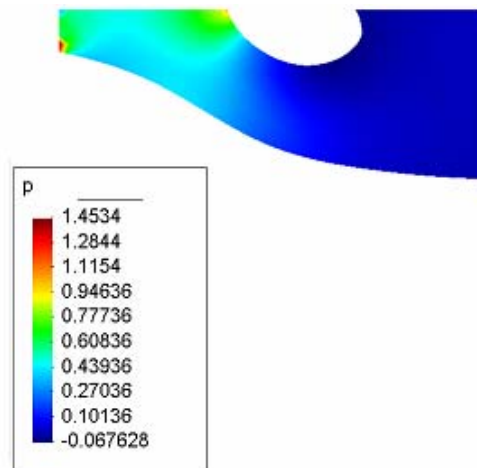


Figura 6. Campo de pressão.

Os gráficos abaixo oferecem uma melhor visualização dos perfis finais em relação aos perfis iniciais para a rampa, a parede e o obstáculo do difusor:

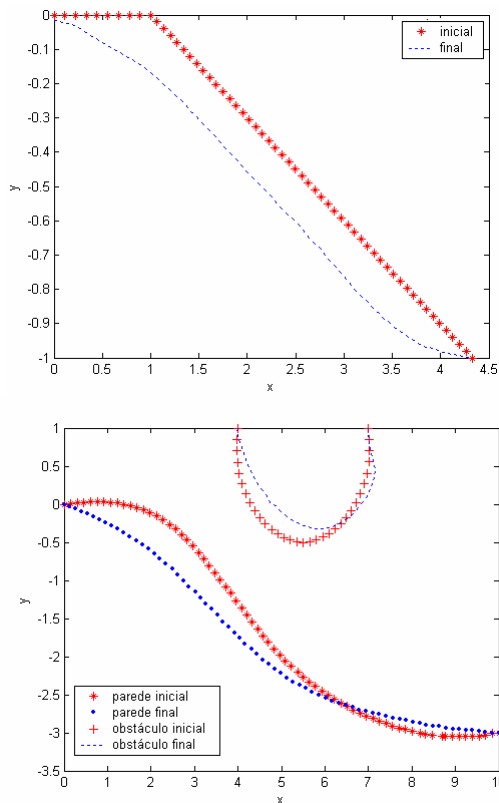


Figura 7. Posição inicial e final dos nós na rampa, parede e no obstáculo.

Os resultados obtidos para a redução da dissipação viscosa na configuração otimizada foram bem satisfatórios. No caso *a* a redução foi aproximadamente de 28% ( $f_{\text{inicial}} = 1.20751$  e  $f_{\text{ótima}} = 0.79565$ ), enquanto no caso *b* foi de 55% ( $f_{\text{inicial}} = 2.66943$  e  $f_{\text{ótima}} = 1.21596$ ).

Através das figuras (4), (5), e (6), pode-se observar a suavização do contorno, devido ao uso das *B-splines* para a definição do contorno, o que contribui para um bom rendimento do escoamento.

Analisando o formato final dos difusores, nota-se um “afundamento” na região da rampa e parede do difusor, o que reduz o gradiente de velocidade e conseqüentemente diminui o valor da função objetivo. No caso do obstáculo percebe-se que o escoamento “tende” a arrastá-lo e diminuí-lo, respeitando as restrições impostas.

Todos os resultados obtidos estão inteiramente de acordo com o aspecto físico dos fenômenos estudados.

#### 4. Conclusões

A discretização adotada via o elemento T7/C3, para as equações envolvidas, se mostrou vantajosa, pois satisfaz a condição Brezzi-Babuska (BB). A satisfação desta condição, garante a existência da solução do problema variacional e a estabilidade numérica do problema discretizado, tornando desnecessária a introdução de parâmetros de estabilidade, simplificando consideravelmente o

esforço necessário para a determinação da análise de sensibilidade associada à otimização de forma.

A representação paramétrica das curvas por meio de *B-splines*, devido a forma como são definidas matematicamente e da propriedade de continuidade, oferece uma maneira simples, eficaz e flexível de definir, manipular e controlar o contorno, levando à obtenção de excelentes resultados. Através das *B-splines* é possível representar suavemente os mais diversos contornos, com fronteiras irregulares e obstruções, de uma maneira mais natural, requerendo poucos dados de entrada, o que facilita a manipulação e controle dos pontos-chave que descrevem o contorno.

A alternativa de determinar a análise de sensibilidade analítica pelo método adjunto, com a adição do termo à função objetivo é eficiente e confiável computacionalmente, pelo fato de reduzir consideravelmente o custo computacional para a solução do problema não-linear do fluido.

A metodologia utilizada neste trabalho mostrou-se bastante versátil e eficaz no tratamento dos problemas de otimização de forma em escoamentos de fluidos que foram propostos. As formas finais dos contornos e superfícies das aplicações estudadas são bastante suaves e a redução nos valores da função objetivo foi bastante significativa.

#### Referências

- [1] R. Aris, "Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics", DOVER, New York, 1989.
- [2] J. S. Arora, "Introduction to Optimum Design", MCGRAW-HILL, New York.
- [3] R. Codina, "On Stabilized Finite Element Methods for Linear Systems of Convection-Diffusion-Reaction Equations, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 188 (2000) 61-82.
- [4] E. Hinton, J.Sienz, Reliable Structural Optimization with Error Estimation, Adaptivity and Robust Sensitivity Analysis, *Computers & Structures*, 4 (1997) 31-63.
- [5] M.E. Mortenson, "Geometric Modeling", JOHN WILEY & SONS, New York, 1997.
- [6] L. M. Steffens, "Desenvolvimento de uma Metodologia Integrada para Otimização de Forma de Escoamentos de Fluidos", Diss. de Mestrado, Dept. Eng. Mec., UFSC, Florianópolis, 2005.
- [7] R. Temam, "Navier-Stokes Equations", ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS COMPANY, New York, 1991.