Existência e unicidade de solução fraca local para uma EDP não-linear em domínio limitado

Lindomar M. Ribeiro[*], **Jorge Ferreira**[†]
Centro de Ciências Exatas e Naturais - CCEN - UFPA
15054-000, Campus-Guamá, 01 - Belém, PA
E-mail: lindomar_mr@yahoo.com.br, jferreira@bs2.com.br

Ducival C. Pereira[‡], **Carlos A. R. Cunha**[§]
ducival@aol.com c_raposo@mgconecta.com.br

1 Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar a existência e unicidade de solução fraca local para uma equação de Klein-Gordon do tipo Kirchhoff-Carrier, a qual denotaremos por (P):

$$(P)\left\{\begin{array}{l} u(t)'' - M(|\nabla u(t)|^2)\Delta u(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) \\ = f \ em \ Q \\ u(t) = 0 \ em \ \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad em \quad \Omega \end{array}\right.$$

Onde Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega\times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$. E ainda, $-\Delta$ é o operador auto-adjunto não limitado definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde $a(u,v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$.
Este tipo de equação aparece na mecânica quântica.

2 Notações e Hipóteses

No que se segue, denotaremos por: $((,)), \|.\|, (,), |.|$ produto interno e norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente.
Sendo que estamos considerando o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da "norma do gradiente", isto é, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$.
Assumiremos as seguintes hipóteses sobre M e M_1:

$H.1)$ $M, M_1 \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$
$H.2)$ $M(s) \geq m_0 > 0, \forall s \in [0,\infty)$
$H.3)$ $M_1(s) \geq 0, \forall s \in [0,\infty)$

[*] Aluno do PPGME/UFPA
[†] Depto. Matemática, Estatística e Ciência da Computação-UFSJ
[‡] Dpto. Matemática - CESUPA
[§] Depto. Matemática, Estatística e Ciência da Computação-UFSJ

3 Resultado principal

Teorema 1 *Sejam M e M_1 funções satisfazendo as hipóteses $H.1$ - $H.3$, existe $0 < T_0 < T$ um número arbitrário, tal que, se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então existe uma única função vetorial $u : [0,T_0] \to L^2(\Omega)$ tal que,*

$$\begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \\ u' \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \\ u'' \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(u'(t),v) + M(|\nabla u(t)|^2)(\nabla u(t),\nabla v) \\ +M_1(|u(t)|^2)(u(t),v) = (f(t),v) \ em \ D'(0,T_0), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \ \ e \ \ u'(0) = u_1 \end{array}$$

Comentário
Para mostrar a existência, usamos o método de Faedo Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions, desigualdades importantes de Análise Funcional.
Para mostrar a unicidade, usamos o método da energia, aplicado com sucesso, devido a regularidade da solução fraca, acoplada com desigualdes de Análise Funcional.

Comentário sobre a demonstração
Por simplicidade, dividimos a demonstração nas segintes etapas:
I - Definir o problema (P), em um espaço de dimensão finita conveniente, que denominamos Problema Aproximado (PA);
II - Mostrar que esse problema aproximado possui solução (local); que chamamos Solução Aproximada . Aqui, para a existência de solução local do (PA), mostraremos que este é equivalente a uma EDO de 1a. ordem, e utilizaremos o Teorema de Existência de Carathéodory;
III - Obter estimativas a priori sobre a seqüência de soluções aproximadas, que nos permitam efetuar

a "passagem ao limite". As quais permitam prolongar a solução ao intervalo $[0, T_0]$;
IV - Essa passagem ao limite é o passo seguinte, onde devemos mostrar, a partir das estimativas a priori, que a seqüência de soluções aproximadas converge, numa topologia conveniente, para a solução do problema (P).

3.1 Problema Aproximado

Consideremos $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ constituído de vetores próprios do operador $-\triangle$ e $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a correspondente sequência de valores próprios.
Para cada $m = 1, 2, 3, ...$, seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subspaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$.
O problema aproximado associado a (P), consiste em encontrar uma solução sob a forma

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x) \in V_m$$

sendo os g_{jm} de classe C^∞, determinados de modo a satisfazer o seguinte sistema:

$$(PA)\begin{cases} (u''_m(t), v) - M(|\nabla u_m(t)|^2)(\Delta u_m(t), v) \\ +M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), v) = (f, v) \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ \ em \ \ H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \ \ em \ \ H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

$\forall v \in V_m$ e $j = 1, 2, ..., m$
ou,

$$(\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j, w_i) - M(|\nabla u_m(t)|^2)(\Delta\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j, w_i)$$
$$+M_1(|u_m(t)|^2)(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j, w_i) = (f, w_i)$$

E, de modo como foi tomada a base de L^2, obtemos

$$\begin{cases} g''_{jm}(t) - \lambda_j M(|\nabla u_m|^2)g_{jm}(t) + M_1(|u_m|^2)g_{jm}(t) \\ = (f, w_j) \\ g_{jm}(0) = \alpha_{jm}, \quad g'_{jm}(0) = \beta_{jm} \quad (j = 1, ..., m) \end{cases}$$

Adptando o sistema acima, via manipulação matricial, para um sistema de EDO de 1a ordem, verificamos que este satisfaz as condições de Carathéodory, logo possui solução $u_m(t)$ em $[0, t_m)$, com $t_m < T$.

3.2 Estimativas à priori

3.2.1 Estimativa I

Considerando $v = u'_m(t)$ em (PA), obtemos

$$|u'_m|^2 + m_0\|u_m\|^2 + m_1|u_m|^2 \le c + \int_0^t |u'_m|^2 ds$$

Usando a desigualdade de Gronwall,

$$|u'_m(t)| \le c_1, \ \ \|u_m(t)\| \le c_2, \ \ \forall m, \forall t \in [0, t_m)$$

Usando o teorema de Carathéodory, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$. Daí,

$$u_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T; H^1_0(\Omega))$$
$$u'_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

3.2.2 Estimativa II

Tomando $v = -\Delta u'_m(t)$ em (PA), obtemos

$$\|u'_m\|^2 + m_0|\Delta u_m|^2 + m_1\|u_m\|^2 \le c_8$$
$$+c_7\int_0^t [\varphi(s) + \varphi(s)^2]ds$$

onde $\varphi(s) = |\Delta u_m|^2 + \|u'_m\|^2$. Usando a desigualdade de Gronwall,

$$\|u'_m\| \le c, \ \forall m, \ \forall t \in [0, T_0]$$
$$|\Delta u_m| \le c, \ \forall m, \ \forall t \in [0, T_0]$$

Portanto,

$$u'_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T_0; H^1_0(\Omega))$$
$$\Delta u_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$u_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T_0; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$

3.2.3 Estimativa III

Tomando-se $v = u''_m(t)$ em (PA), e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e integrando de 0 a t, obtemos

$$\int_0^t |u''_m|^2 ds \le \int_0^t |M(\|u_m\|^2)|\Delta u_m||u''_m|ds$$
$$+\int_0^t |M_1(|u_m|^2)||u_m||u''_m|ds + \int_0^t |f||u''_m|ds$$

Usando as desigualdades $ab \le \frac{1}{\varepsilon}a^2 + c(\varepsilon)b^2$, $(\varepsilon > \frac{3}{4})$ e $2ab \le a^2 + b^2$
resulta,

$$(1 - \frac{3}{4\varepsilon})\int_0^t |u''_m(t)|^2 ds \le c$$

Portanto,

$$u''_m \ \text{ é } \ limitada \ \ em \ \ L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$$

3.3 Passagem ao limite

Das estimativas anteriores,

$$u_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T_0; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$
$$u'_m \text{ é } limitada \ em \ L^\infty(0, T_0; H^1_0(\Omega))$$
$$u''_m \text{ é } limitada \ em \ L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$$

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, obtemos

$$u_m \to u \ em \ L^\infty(0, T_0; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)), \ \ fraco \star$$
$$\Leftrightarrow$$
$$u_m \to u \ em \ L^2(0, T_0; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)), \ \ fraco$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\Delta u_m, w) \to (\Delta u, w), \ \forall w \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$$
$$u'_m \to u' \ em \ L^\infty(0, T_0; H^1_0(\Omega)), \ \ fraco \star$$

Temos também que

$$u''_m \to u'' \ em \ L^2(0,T_0;L^2(\Omega)), \ fraco$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(u''_m,w) \to (u'',w), \ \forall w \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$$

3.4 Condições iniciais

É fácil provar que

$$u(0) = u_0$$
$$u'(0) = u_1$$

usando métodos clássicos.

3.5 Convergências de M e M_1

Pelo Lema de compacidade de Aubin-Lions, tomando $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, e $B = B_1 = H_0^1(\Omega)$, temos

$$u_m \to u, \ forte \ em \ L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

obtemos, usando alguns resultados de Análise Funcional,

$$M(\|u_m\|^2) \to M(\|u\|^2), \ q.s. \ em \ [0,T_0]$$

Donde concluímos,

$$M(\|u_m\|^2)((u_m,v)) \to M(\|u\|^2)((u,v))$$
$$em \ L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

Para a convergência do outro termo não linear, sabendo que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t),v) \to M_1(|u(t)|^2)(u(t),v)$$
$$em \ \ L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$$

3.6 Unicidade

Sejam $u, v : [0,T_0] \to L^2(\Omega)$ soluções do nosso problema nas condições do teorema principal. Seja $w(t) = u(t) - v(t)$.

$$w(t) \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$
$$w'(t) \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$
$$w''(t) \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$$

Sendo u e v soluções do problema (P), temos

$$u''(t) - v''(t) - M(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) + M(\|v(t)\|^2)\Delta v(t)$$
$$+M_1(|u(t)|^2)u(t) - M_1(|v(t)|^2)v(t) = 0$$

Somando e subtraindo os termos $M(\|u(t)\|^2)\Delta v(t)$ e $M_1(|u(t)|^2)v(t)$, na equação acima, e depois agrupando adequadamente, obtemos

$$w''(t) - M(\|u(t)\|^2)\Delta w(t) + M_1(|u(t)|^2)w(t)$$
$$-[M(\|u(t)\|^2) - M(\|v(t)\|^2)]\Delta v(t)$$
$$+[M_1(|u(t)|^2) - M_1(|v(t)|^2)]v(t) = 0$$

Pelo Teorema do Valor Médio, regularidade da solução, e usando as desigualdades de Cauchy e de Gronwall, concluímos que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 = 0$$

Donde segue que $|w(t)| = 0$, ou seja, $w(t) = 0$. Logo, $u(t) = v(t)$, $\forall t \in [0,T_0]$.

Referências

[1] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[2] CARRIER, G.F. *On the vibration problem of elastic string.* Q.J. Appl. Math 3,pp151-165, 1945.

[3] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.

[4] MATOS, M.P., FEREIRA, J., SANTOS, M. L. and PEREIRA, D.C. *Hidden Regularity for the Hiperbolc-Parabolic Equations.* (To Appear).

[5] MEDEIROS L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Texto de Métodos Matemáticos. no. 25, IM-UFRJ, 1993.