

Compressão Quântica de Imagens JPEG

Luciano Silva

Departamento de Ciência da Computação

Faculdade de Computação e Informática, Universidade Presbiteriana Mackenzie

e-mail: lucianosilva@mackenzie.com.br

Resumo

Computação Quântica representa um paradigma poderoso para abordar problemas computacionalmente difíceis. Transformadas aplicadas a processamento de sinais têm sido transportadas para o ambiente quântico, disponibilizando um suporte altamente eficiente para diversas aplicações. Este trabalho propõe uma versão quântica da Transformada Discreta do Cosseno bidimensional e apresenta um esquema eficiente para compressão quântica de imagens baseado no padrão JPEG.

Palavras-chave: Transformada Discreta do Cosseno, Compressão de Imagens, Processamento de Sinais, Algoritmos Quânticos, Computação Quântica.

1 Introdução

JPEG, acrônimo de *Joint Photographic Experts Group*, é um método de compressão bastante difundido na Internet para imagens estáticas. Surgiu de esforços conjuntos entre o CCITT e a ISO em 1987, que produziram a primeira proposta do padrão em 1991. Desde então, vários mecanismos de aceleração em *software* e em *hardware* têm sido propostos e muitos têm foco principal na Transformada Discreta do Cosseno, ponto principal de baixo desempenho do esquema JPEG para grandes imagens.

Com o advento da Computação Quântica, proposto por Feynman em 1982, novos algoritmos para problemas computacionalmente difíceis foram derivados, tendo como base princípios de Física Quântica em lugar dos tradicionais princípios da Física Clássica. Shor[9] mostrou a viabilidade da Computação Quântica exibindo um algoritmo polinomial para o bem-conhecido problema da fatoração de inteiros, notável integrante da classe de problemas NP-Completo. Na proposição deste algoritmo, surgiu uma versão quântica da Transformada Discreta de Fourier, abrindo um amplo campo para aplicação de algoritmos quânticos em processamento de sinais.

Recentemente, Klappenecker e Rötteler[5] exibiram uma versão quântica da Transformada Discreta do Cosseno unidimensional, deixando em aberto extensões para dimensões superiores. A versão

quântica permitiu reduzir a complexidade clássica de $O(2^n)$ para $O(n^2)$, representando um excelente ganho de desempenho para grandes amostras. Muitas outras transformadas, como a Transformada Discreta de Wavelet, já possui versões quânticas altamente eficientes.

Este artigo estende esta versão quântica da transformada para o ambiente bidimensional. Adicionalmente, é proposto um esquema de compressão quântica baseado nesta transformada, que permite reduzir significativamente o custo computacional do algoritmo de compressão JPEG.

2 Transformada Discreta do Cosseno

A Transformada Discreta do Cosseno (*DCT-Discrete Cosine Transform*) tem sido extensivamente usada em vários esquemas de processamento de sinais, principalmente na campo de compressão baseada em transformações de sinais. Existem quatro definições¹ para a DCT (Rao e Yip[7]), mas somente uma delas(DCT-2) é considerada útil para compressão e é referenciada comumente como DCT:

Definição 1 *Seja $X = (x_k)$, $k = 0, \dots, n - 1$, uma seqüência de n valores reais. A DCT unidimensional de X é a seqüência $\tilde{X} = (\tilde{x}_k)$, dada por:*

$$\tilde{x}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} c_k \sum_{p=0}^{n-1} x_p \cos \left[\frac{(2p+1)k\pi}{2n} \right]$$

onde

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ se } k = 0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A DCT unidimensional pode ser usada para transformar sinais unidimensionais para compressão como, por exemplo, amostras de áudio digital, reduzindo a entropia das amostras. Apesar de

¹Isto advém de uma interpretação, via Álgebra Linear, da DCT como uma transformação de rotação, onde existem quatro maneiras diferentes de selecionar n ângulos igualmente espaçados que geram vetores ortogonais de cossenos.

não aplicada diretamente a imagens, a DCT unidimensional foi lembrada neste artigo porque oferece a base para a construção da DCT quântica unidimensional que, por sua vez, é o suporte para construção da DCT quântica bidimensional.

Para sinais bidimensionais, como os que ocorrem em imagens, a DCT sofre uma pequena modificação(Salomon[8]). Neste contexto, os sinais são normalmente divididos em blocos de tamanho $n \times m$ e a DCT bidimensional é definida como:

Definição 2 *Seja $X = (x_{kj})$, $k = 0, \dots, n$ e $j = 0, \dots, m$, um bloco de $n \times m$ valores reais. A DCT bidimensional de X é o bloco $\tilde{X} = (\tilde{x}_{kj})$, dado por:*

$$\tilde{x}_{kj} = \frac{2}{\sqrt{nm}} c_k c_j \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} x_{pq} \cos \left[\frac{(2q+1)j\pi}{2n} \right] \cos \left[\frac{(2p+1)k\pi}{2n} \right]$$

onde

$$c_k, c_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & , \text{ se } k=0 \text{ ou } j=0 \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

O elemento \tilde{x}_{00} normalmente é o maior valor do bloco transformado e é denominado *coeficiente DC*. Os outros elementos são chamados *coeficientes AC*. Assim como a DCT unidimensional, a DCT bidimensional também é invertível e sua inversa é dada por:

$$x_{kj} = \frac{2}{\sqrt{nm}} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} c_p c_q \tilde{x}_{pq} \cos \left[\frac{(2j+1)q\pi}{2n} \right] \cos \left[\frac{(2k+1)p\pi}{2n} \right]$$

A fórmula de inversão apresentada acima é importante para processos de transformação inversa em descompressão de sinais. Finalmente, somente para questões de notação, se o cosseno for substituído em todas as fórmulas anteriores, obtém-se as chamadas Transformadas Discretas de Seno(*DST-Discrete Sine Transform*).

3 Compressão JPEG

O esquema básico de compressão JPEG compreende sete passos fundamentais. Os dois primeiros passos afetam somente imagens em cores e não são aplicados a imagens em níveis de cinza.

No primeiro passo, imagens em cores são transformadas do espaço de cores *RGB* para o espaços de luminância/crominância(*YCrCb*). O segundo passo é necessário somente quando se trabalha com compressão hierárquica e consiste em realizar um processo de sub-amostragem para criar *pixels* de baixa resolução. Esta sub-amostragem é realizada somente nos canais de crominância e utiliza taxas típicas de 2:1 (horizontal e vertical) ou 2:1 horizontal e 1:1 vertical.

Do terceiro passo em diante, o esquema é comum a todos os tipos de imagens. No terceiro passo, a imagem a ser comprimida é organizada em blocos de tamanho 8×8 , denominados *unidades de dados*. Cada unidade é comprimida separadamente e, a ordem de compressão depende do esquema usado. Por

exemplo, no esquema não-entrelaçado, o compressor trata as componentes de luminância de todas as unidades de dados, depois todas as componentes de crominância C_r e, finalmente, as componentes C_b . Já no esquema entrelaçado, o compressor trata todas as componentes de cor da primeira unidade, em seguida da segunda unidade e assim por diante.

O quarto passo consiste em aplicar a DCT bidimensional a cada uma das unidade de dados, gerando mapas 8×8 de componentes de frequência. A figura abaixo mostra o resultado da DCT bidimensional aplicada a uma unidade binária e a uma em níveis de cinza:

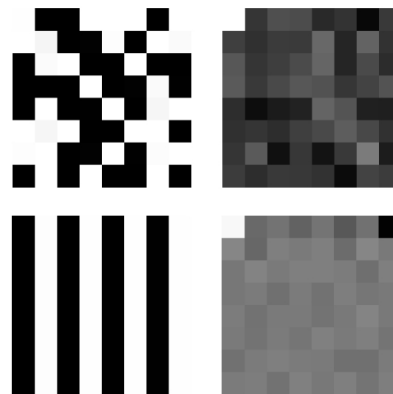


Figura 1: Aplicação da DCT bidimensional a duas unidades de dados.

Cada um dos mapas de frequência representa o valor médio dos pixels e mudanças sucessivas de alta-freqüência dentro da unidade. Não é difícil observar que a aplicação da DCT incorre em perdas de qualidade de cada unidade. Por outro lado, além da perda ser relativamente pequena, ocorre uma diminuição da entropia de cada unidade de dados gerada pelo aumento de redundância de valores, o que torna bastante eficientes os resultados dos codificadores de entropia, analisados no final desta seção. A aplicação da DCT bidimensional a cada unidade de dados é um dos passos de maior custo computacional e o principal alvo de redução deste artigo.

No quinto passo, ocorre o processo de quantização. Cada uma das 64 componentes de frequência das unidades de dados transformadas pela DCT é dividida por um valor denominado *coeficiente de quantização*(QC) e o resultado é arredondado segundo funções-teto ($[x]$). Valores elevados de QC causam maiores perdas e são adequados para altas freqüências. A princípio, cada valor de QC pode ser especificado pelo compressor e isto define a qualidade da compressão. Porém, na prática, a maioria das implementações JPEG utilizam tabelas recomendadas pelo padrão, separadas para luminância e crominância.

Abaixo, é exibida uma instância destas tabelas:

16	11	10	16	24	40	51	61	17	18	24	47	99	99	99	99
12	12	14	19	26	58	60	55	18	21	26	66	99	99	99	99
14	13	16	24	40	57	69	56	24	26	56	99	99	99	99	99
14	17	22	29	51	87	80	62	47	66	99	99	99	99	99	99
18	22	37	56	68	109	103	77	99	99	99	99	99	99	99	99
24	35	55	64	81	104	113	92	99	99	99	99	99	99	99	99
49	64	78	87	103	121	120	101	99	99	99	99	99	99	99	99
72	92	95	98	112	100	103	99	99	99	99	99	99	99	99	99
Luminância								Crominância							

Figura 2: Quantizações recomendadas pelo padrão JPEG.

Se o processo de quantização é feito de forma adequada, restarão poucos valores diferentes de zero nas unidades de dados e estes estarão concentrados na parte superior-esquerda do bloco. Em seguida, o sexto passo consiste da compressão propriamente dita, onde são utilizados *codificadores de entropia*. São utilizados dois tipos de codificadores: um para os coeficientes DC e outro para os coeficientes AC. Estatisticamente, verifica-se que unidades contíguas na imagem possuem valores médios de *pixels* iguais. Como os coeficientes DC representam uma média dos pixels em cada unidade, seus valores entre unidades contíguas varia pouco e podem ser codificados pelas suas diferenças, através de uma tabela de codificação pré-definida. Para os 63 coeficientes AC restantes, utiliza-se ou uma versão combinada dos esquemas RLE[3] e Huffman[4] ou pelo método QM, variante do esquema aritmético[2]. Como a aplicação da DCT, seguida da quantização, gera redundâncias mais proeminentes na direção da diagonal secundária da unidade de dados, a rasterização dos coeficientes AC é realizada segundo esta direção, processo denominado rasterização ZZ(*zigzag*).

Finalmente, no sétimo passo, após adicionados cabeçalhos e outros parâmetros JPEG, a *stream* binária resultante é armazenada em um arquivo.

4 Máquinas Quânticas

Uma máquina quântica é uma máquina de estados, formada por n sistemas quânticos de dois níveis, cada qual associado a um qubit. O espaço de estados possíveis uma máquina quântica é dado por \mathbb{C}^{2^n} , com estrutura de Espaço de Hilbert.

Através de endomorfismos sobre \mathbb{C}^{2^n} , uma máquina quântica pode ser dotada de poder computacional. Estes endomorfismos permitem mudança de estados e podem ser escritos como uma combinação de transformações elementares: transformações de qubits simples e NOT-controlados(CNOT). Estas transformações elementares podem ser vistas como portas lógicas,

denominadas *portas quânticas*, e definem uma base universal para todas as outras portas lógicas que operam no universo quântico[1].

Definição 3 Uma transformação de qubit simples é uma transformação localmente unitária da forma $\mathbf{1}_{2^{n-t}} \otimes U \otimes \mathbf{1}_{2^{t-1}}$, com $U \in \mathcal{U}(\mathbf{2})$.

A figura abaixo mostra uma representação gráfica como porta lógica para a transformação de qubit simples $U \otimes \mathbf{1}_2$:

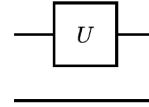


Figura 3: Notação gráfica para uma transformação de qubit simples.

A porta CNOT possui duas entradas e é representada pela figura abaixo:

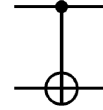


Figura 4: Notação gráfica para a operação CNOT.

Formalmente, a transformação vinculada a esta porta pode ser definida como:

Definição 4 Sejam $|x\rangle$ e $|y\rangle$ elementos de uma base de \mathbb{C}^2 . A transformação $CNOT : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ é uma transformação unitária tal que:

$$CNOT(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes |x \oplus y\rangle$$

, onde \oplus denota a adição módulo 2.

Na transformação CNOT, a entrada x é denominada *controle* e y é chamado de *alvo*. É fácil observar que esta transformação inverte o valor do alvo se e somente se o controle estiver no estado $|1\rangle$. Além da inversão controlada de alvos, a operação CNOT também pode produzir estados emaranhados, muito importantes para procedimentos de inicialização de diversos algoritmos quânticos.

5 DCT Quântica Unidimensional

A descrição da versão quântica da DCT unidimensional, proposta por Klappeneker e Rötteler[5], é apresentada nesta seção. São introduzidas algumas

O produto $\overline{D}_0 D^t$ opera da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{D}_0 D^t(|00\rangle) &= |00\rangle & \overline{D}_0 D^t(|0x\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1x\rangle \\ \overline{D}_0 D^t(|10\rangle) &= -i|10\rangle & \overline{D}_0 D^t(|1x\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0x\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1x\rangle \end{aligned}$$

Este produto pode ser decomposto pela multiplicação $\overline{D}_0 D^t = (B^t \otimes \mathbf{1}_n) \cdot J$, onde $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ e $J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

O circuito completo para a computação das DCT e DST unidimensionais é apresentado na próxima figura, onde estão destacadas as decomposições apresentadas anteriormente.

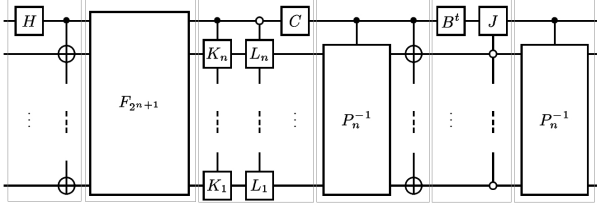


Figura 7: Circuito completo para computação das DCT/DST unidimensionais.

A complexidade deste circuito é estabelecida através do seguinte resultado:

Teorema 3 *O circuito apresentado calcula simultaneamente as DCT e DST unidimensionais sobre n valores reais com $O(n^2)$ portas quânticas elementares.*

Através de um processo de separação algébrica, o circuito anterior será tomado como base para a construção da DCT bidimensional, apresentada na próxima seção.

6 DCT Quântica Bidimensional

Como \mathbb{R} é um corpo abeliano e associativo, a expressão de cada elemento da DCT bidimensional pode se reescrita como:

$$\tilde{x}_{kj} = \sqrt{\frac{2}{m}} c_j \sum_{q=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{2}{n}} c_k \sum_{p=0}^{n-1} x_{pq} \cos \left[\frac{(2p+1)k\pi}{2n} \right] \right] \cos \left[\frac{(2q+1)j\pi}{2m} \right]$$

Formalmente, isto equivale a dizer que a DCT bidimensional é *separável* e permite interpretá-la como uma composição de DCTs unidimensionais. Assim, a DCT bidimensional de um bloco pode ser calculada aplicando-se a transformada unidimensional a cada linha do bloco e, sobre o resultado, aplicar novamente uma transformada unidimensional nas colunas.

Sem perda de generalidade, o circuito a ser proposto trabalha com blocos quadrados, isto é, $n = m$. O circuito, apresentado na Figura 8, é uma concatenação de circuitos DCT/DST unidimensionais

seguidos de operações de projeção, bem como operações de leitura e atualização de blocos.

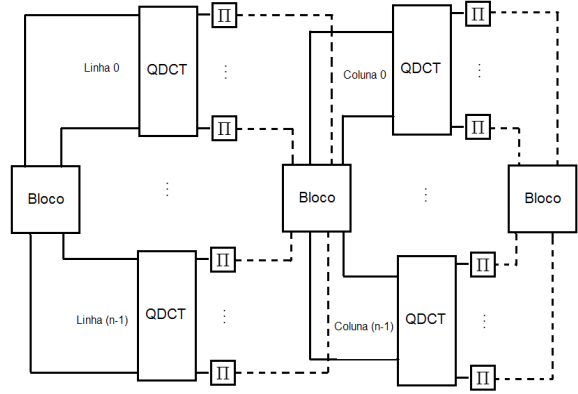


Figura 8: Circuito quântico para computação da DCT bidimensional.

Os blocos QDCT representam os circuitos DCT/DST unidimensionais da Figura 7. Linhas contínuas representam operações de leitura nos blocos e, as pontilhadas, operações de atualização. A operação de projeção Π obtém o primeiro termo das somas diretas $C_n \oplus (-i)S_n$, ou seja, as componentes das DCT bidimensionais. O próximo resultado estabelece a corretude e complexidade do circuito proposto:

Teorema 4 *O circuito apresentado na Figura 8 calcula as componentes da DCT bidimensional de um bloco de tamanho n com valores reais e possui complexidade $O(n^3)$.*

Prova: Seja $X = (x_{kj})$, $k, j = 0, \dots, n$ um bloco de $n \times n$ valores reais. Imediatamente antes do primeiro grupo de projeções Π , da esquerda para a direita, os valores das linhas dos circuitos são os estados correspondentes às somas diretas $DCT_k(x_{kj}) \oplus (-i)DST_k(x_{kj})$, cada uma com valor de k fixo. Após as projeções, obtém-se os estados correspondentes às DCT-linha, que alimentam os próximos circuitos unidimensionais, produzindo a saída $DCT_j(DCT_k(x_{kj})) \oplus (-i)DST_j(DCT_k(x_{kj}))$. Após o último procedimento de projeção, o resultado de cada linha j do circuito contém o estado correspondente ao valor $DCT_j(DCT_k(x_{kj}))$. Pelo comentário anterior da separabilidade da DCT bidimensional, a corretude do circuito segue imediatamente. Cada circuito da DCT unidimensional possui complexidade de $O(n^2)$ portas elementares e como foram utilizadas $2n$ destas portas, adicionadas as $2n$ projeções, chega-se à complexidade de portas $O(n^3)$. \square

A próxima seção utiliza uma instância do circuito apresentado para aplicação em compressão quântica de imagens, segundo o padrão JPEG.

7 Compressão JPEG Quântica

O esquema de compressão JPEG quântico é dividido em dois segmentos. O primeiro segmento, que utiliza computação clássica, realiza os procedimentos de transformação de espaços de cor, sub-amostragem, divisão de blocos, quantização e codificação de entropia. O segundo segmento possui alicerces quânticos e utiliza uma instância de tamanho 64 da DCT bidimensional quântica (QDCT) construída anteriormente.

O diagrama de blocos do esquema JPEG quântico é mostrado a seguir e reflete a discussão iniciada na Seção 3:

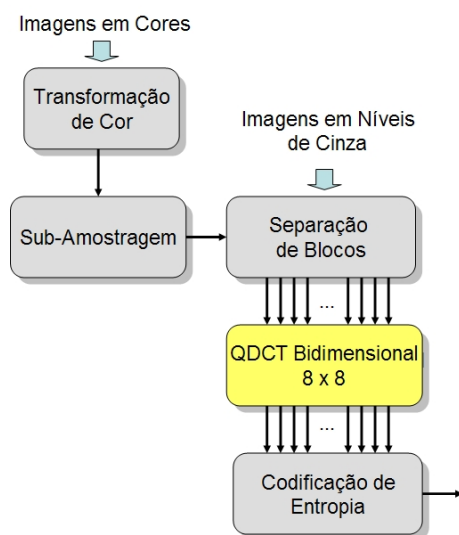


Figura 9: Esquema de compressão JPEG quântico.

Formalmente, as entradas e saídas do processo da QDCT bidimensional parecem bastante triviais. Porém, implementações físicas destas passagens envolvem transformações de informações clássicas para quânticas e vice-versa. Alguns procedimentos de emaranhamento quântico e decoerência, como os descritos por Nielsen e Chuang[6], podem ser utilizados para realização destas transformações.

Aumentando-se a quantidade de blocos da QDCT, é possível trabalhar blocos de forma paralela e explorando, principalmente, técnicas sistólicas para aumentar a performance de fluxo.

8 Conclusões e Trabalhos Futuros

Computação Quântica disponibiliza um ambiente bastante adequado para abordagem de problemas difíceis no modelo clássico de Turing, permitindo o desenvolvimento de circuitos e algoritmos computacionalmente eficientes em tempo e espaço. Em

particular, a área de transformadas para processamento digital de sinais tem recebido grandes contribuições de algoritmos nos últimos anos.

Este artigo apresentou uma extensão bidimensional para a versão quântica da DCT unidimensional, proposta por Klappenecker e Rötteler. Além do circuito quântico para a extensão bidimensional, foi proposto um fluxo híbrido – clássico e quântico – para o esquema de compressão JPEG, o que permitiu reduzir significativamente a sua complexidade nos procedimentos de transformação de blocos.

Além do estudo de ambientes para realização física do esquema proposto, futuros trabalhos irão avaliar outros procedimentos da compressão JPEG passíveis de aceleração quântica. Além disso, outros tipos de transformadas como, por exemplo, a DWT (*Discrete Wavelet Transform*) bidimensional, base do esquema JPEG-2000, poderiam ser alvo de implementações quânticas eficientes.

Referências

- [1] A. Barenco *et al.*, Elementary Gates for Quantum Computation, *Physical Review A*, **52**(5), pp. 3457–3467, 1995.
- [2] T.M. Cover e J.A. Thomas, "Elements of Information Theory", John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [3] S.W. Golomb, Run Length Encodings, *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-12**(3), pp. 399–401, 1966.
- [4] D. Huffman, A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes, *Proceedings of the IRE*, **40**(9), pp. 1098–1101, 1952.
- [5] A. Klappenecker e M. Rötteler, Discrete Cosine Transforms on Quantum Computers, *Proceedings of IEEE R8-EURASIP*, pp. 464–468, 2001.
- [6] M.A. Nielsen e I.L. Chuang, "Quantum Information and Quantum Information", Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [7] K.R. Rao e P. Yip, "Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages and Applications", Academic Press, 1990.
- [8] D. Salomon, "Data Compression – The Complete Reference", 3rd. ed., Springer-Verlag, New York, 2004.
- [9] P.W. Shor, Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithm and Factoring, *Proceedings of FOCS '94*, pp. 124–134, 1994.
- [10] V. Wickerhauser, "Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software", A.K. Peters, Wellesley, 1993.