

# Algoritmos para Pertinência de Pontos em Hipersuperfícies Discretas Fechadas de Dimensão Arbitrária

Luciano Silva

Departamento de Ciência da Computação

Faculdade de Computação e Informática, Universidade Presbiteriana Mackenzie

e-mail: lucianosilva@mackenzie.com.br

## Resumo

O problema de pertinência de pontos em objetos matematicamente bem definidos, como curvas e superfícies, encontra-se entre os problemas mais elementares em Computação Gráfica. A especificação e implementação de predicados de pertinência corretos em critérios geométricos e numéricos, bem como eficientes, é de grande interesse computacional e possui um amplo espectro de aplicações em operações básicas como *filling*, *stroking* e *antialiasing*. Apesar de bem posto, o problema da pertinência ainda carece de métodos que alcancem grandes classes de geometrias. Este trabalho apresenta uma classe de algoritmos de pertinência de pontos, que alcança o domínio das hipersuperfícies discretas de dimensão arbitrária e possui baixa complexidade, estruturas de dados simples e viabilidade para implementações em *hardware* como principais características.

**Palavras-chave:** Pertinência de Pontos, Superfícies Discretas, Geometria Discreta, Algoritmos Discretos, Geometria Computacional.

## 1 Introdução

Um dos objetivos centrais da computação gráfica é produzir imagens a partir de um modelo, processo denominado *rendering*. Um modelo é descrito como um conjunto de objetos gráficos: um objeto gráfico consiste de uma família finita  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$  de subconjuntos,  $U_i \subset \mathbb{R}^n$ , de algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , e uma função  $F : U_1 \cup \dots \cup U_m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . A família  $\mathcal{U}$  é chamada de conjunto de dados geométricos e define a forma (geometria e topologia) do objeto, e  $f$  é a função atributo do objeto que define, por exemplo, a cor e textura do objetos. A dimensão da união  $U_1 \cup \dots \cup U_m$  define a dimensão do objeto.

Uma classe bastante importante de algoritmos de *rendering* é denominada *algoritmos baseados em imagem*, cujos representantes mais conhecidos são os algoritmos de *filling*, *stroking* e *antialiasing*. Esta classe frequentemente necessita de uma operação bastante elementar, denominada *pertinência de pontos*, que, em linhas gerais, permite decidir se um determinado ponto está no interior de um objeto matematicamente bem definido, como curvas, superfícies ou volumes. Apesar de bem posto, o problema

da pertinência de pontos encontra vários obstáculos como robustez geométrica e numérica, estabilidade e alcance a grandes classes de geometrias.

Em [8], Forrest reafirmou a necessidade de um algoritmo robusto e eficiente para pertinência de pontos. No caso bidimensional, uma resposta foi dada por Corthout and Pol [3], que implementaram um predicado com robustez geométrica e numérica garantidas *a priori*, além de alcançarem uma classe bastante geométrica bastante complexa – curvas discretas com auto-intersecção – e construírem uma implementação em *hardware* de um predicado de pertinência, através do *chip Pharos*. Poucos algoritmos de pertinência têm sido publicados, principalmente em dimensões mais elevadas.

Este artigo utiliza como base o trabalho de pertinência bidimensional desenvolvido por Corthout e Pol, extendendo-o para dimensões inteiras arbitrárias e alcançando uma classe bastante geométrica ainda mais complexa, a das hipersuperfícies discretas com auto-intersecção. Além disso, são propostos algoritmos generalizados de pertinência com baixa complexidade e que utilizam estruturas de dados muito simples, qualidade que facilita implementações em *hardware*.

## 2 Geometria Discreta

O ambiente geométrico deste trabalho é formado por listas, hipersuperfícies e objetos discretos. A definição precisa destes elementos desempenha um papel fundamental na caracterização das noções de interior e exterior.

Listas são utilizadas para representar objetos bidimensionais e semi-retas discretas. Uma *lista de tamanho n* imersa no espaço inteiro discreto d-dimensional  $\mathbb{Z}^d$  é um elemento do conjunto:

$$\Lambda_n^d = \{L : [0..n] \rightarrow \mathbb{Z}^d\}.$$

Uma lista  $L$  é chamada de *lista fechada* sse  $L(0) = L(n)$ . O conjunto de todas as listas imersas em  $\mathbb{Z}^d$  será denotado por  $\Lambda^d$  e o subconjunto de listas fechadas por  $\Lambda_c^d$ .

Complexos celulares formam a base para definição de objetos discretos. Da Topologia Algébrica[14], vem que um complexo celular euclidiano  $k$ -dimensional é um objeto formado pela junção de células homeomorfas a

bola fechada  $k$ -dimensional, chamadas de  $k$ -células.

**Definição 2.1.** Um objeto discreto  $k$ -dimensional  $\Omega$  é um complexo celular euclidiano discreto puro  $k$ -dimensional, isto é, um complexo celular cujas 0-células têm coordenadas inteiras e toda  $k'$ -célula,  $k' < k$ , é bordo de de alguma  $k$ -célula. O conjunto dos objetos  $k$ -dimensionais  $\Omega$  com  $n$   $k$ -células, imersos no espaço  $\mathbb{Z}^d$ , é denotado por  $\Omega_n^{k,d}$ .

Hipersuperfícies discretas limitam o conjunto de pontos interiores a um objeto discreto e representam o principal elemento para computação de pertinência de pontos.

**Definição 2.2.** Seja  $\Omega$  um objeto discreto  $k$ -dimensional e  $\Omega'$  seu sub-complexo formado por células  $(k-1)$ -dimensionais. O bordo combinatório de  $\Omega$ , denotado por  $\partial(\Omega)$ , é definido pelo fecho combinatório  $\Omega'$ :

$$\partial(\Omega) = Cl(\Omega') = \Omega' \cup \{\tau \in \Omega \mid \exists \tau' \in \Omega', \tau \leq \tau'\}.$$

Uma hipersuperfície discreta  $k$ -dimensional  $\mathcal{M}$  é um sub-conjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^{k+1}$  que é bordo combinatório de algum objeto discreto  $(k+1)$ -dimensional  $\Omega$  imerso em  $\mathbb{Z}^{k+1}$ .

A Figura 1 mostra alguns exemplos de objetos discretos e suas correspondentes hipersuperfícies discretas. Não é difícil observar que toda hipersuperfície  $k$ -dimensional  $\mathcal{M}$  é também um objeto discreto  $k$ -dimensional.

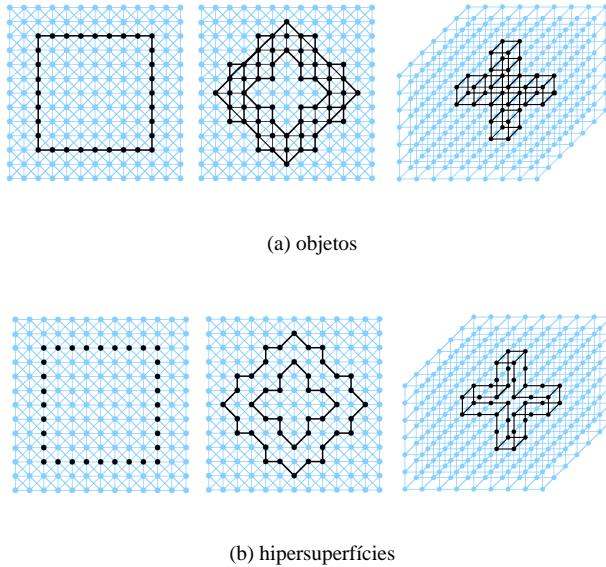


Figura 1: Objetos e hipersuperfícies discretas de dimensões 1, 2 and 3

As noções de regiões interiores e exteriores necessitam que as hipersuperfícies sejam dotadas de uma orientação.

**Definição 2.3.** Uma hipersuperfície discreta  $\mathcal{M}$  é orientável sse seu complexo celular subjacente for orientável. O vetor que define a orientação de cada célula  $\tau \in \mathcal{M}$  é denotado por  $\vec{\tau}$ .

Ressalta-se que existem somente duas classes de orientação para uma hipersuperfície  $\mathcal{M}$ . Desde que a

orientação seja coerente[14], o resultados dos teste de pertinência serão os mesmos.

### 3 O Problema Generalizado de Pertinência e Trabalhos Prévios

O problema generalizado de pertinência de pontos pode ser posto da seguinte forma:

**Problema 3.1.** Dados uma hipersuperfície discreta fechada  $(k-1)$ -dimensional  $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^k$  e um ponto  $P \in \mathbb{Z}^k$ ,  $P$  pertence a alguma região interior definida por  $\mathcal{M}$  ?

A noção de região interior é intuitiva quando  $\mathcal{M}$  não tem auto-intersecção. Mesmo nesta situação, é necessário o uso de uma ferramenta matemática chamada número de rotação (winding number). Existem duas maneiras de definir números de rotação: uma versão analítica, que pode empregar integrais complexas de linha [14], formas diferenciais [10] ou a Integral de Kronecker [13], e uma versão geométrica, que conta o números de intersecções diretas com uma semi-reta [4, 9]. Algoritmos de pertinência de pontos utilizam, normalmente, a versão geométrica, dada a sua viabilidade para implementação.

Existem poucos métodos de pertinência de pontos em Computação Gráfica. As limitações destes métodos incluem geometrias reduzidas, tratamento exaustivo de casos especiais e problemas numéricos. Alguns métodos somente caracterizam as regiões interiores e exteriores, mas não disponibilizam nenhum algoritmo para pertinência.

No ambiente bidimensional, grande parte dos métodos computa ou conta o números de intersecções entre semi-retas e partes da hipersuperfície discreta. Para estes métodos, geometrias complexas representam a principal barreira e, normalmente, necessitam de um tratamento extensivo de casos especiais. Edelsbruner [4] e Guibas et al. [9] são exemplos bastante representativos nessa linha. Corthout e Pol [3] desenvolveram um método para geometrias dimensionais complexas, com robustez geométrica e numérica provadas a priori e será o ponto de partida para a extensão proposta neste artigo. Mesmo com implementação em hardware, através do chip Pharos, o método ainda possui uma dependência quadrática em relação à resolução. Fabris et al. [5] [6] reduziram significativamente a complexidade de utilização do método de Corthout and Pol para operações de *filling* e *stroking*.

Uma linha alternativa de tratamento para o ambiente bidimensional é apresentada por Tang [15], que transforma a integral de linha da definição analítica de número de rotação para uma integral dupla, utilizando o Teorema de Green.

Poucos resultados têm sido publicados para dimensões maiores ou iguais a 3. Grande parte destes resultados ainda somente caracterizam interiores e exteriores, não disponibilizando predicados de decisão de pertinência para as regiões. Nesta linha, Morgenthaler e Rosenfeld [11] apresentaram uma versão discreta do bem-conhecido Teorema de Jordan-Bröwer e Ayala et al. [1]

estenderam este resultado para o domínio das variedades discretas.

Numa linha mais computável, Feito *et al.* [7] desenvolveram um método para poliedros gerais, que utiliza cálculo de determinantes para decidir a pertinência de pontos. Este método inclui modelos *non-manifold* e sua extensão para geometrias mais complexas não é clara. O trabalho de pertinência mais atual é devido a Ayala *et al.* [2], que descreve um complexo algoritmo para determinar as componentes do complemento de uma variedade discreta  $(n-1)$ -dimensional, imersa em  $\mathbb{Z}^n$ . Mesmo no caso tridimensional, a implementação deste método é uma tarefa bastante árdua.

## 4 Pertinência Bidimensional

Objetos discretos bidimensionais possuem bordos combinatórios que podem ser vistos como listas fechadas bidimensionais, denominadas *curvas discretas*. No contexto bidimensional, o problema de pertinência pode ser colocado como:

**Problema 4.1.** *Dada uma lista fechada  $L \in \Lambda^2$  e um ponto  $P \in \mathbb{Z}^2$ , decidir se  $P$  a alguma região interior definida por  $L$ .*

A teoria e o método de Corthout and Pol para resolver este problema são apresentados a seguir. Em linhas gerais, o ponto inicial é o desenvolvimento de uma versão discreta do Teorema da Curva de Jordan para curvas discretas não-simples, isto é, com possibilidade de auto-intersecção. Este resultado permite estabelecer uma estreita relação entre as versões analítica e geométrica do número de rotação bidimensional.

A versão analítica adotada utiliza uma integral de linha sobre o corpo dos números complexos:

**Definição 4.1.** *O número de rotação  $w(\gamma, P)$  de uma curva fechada e suave  $\gamma$  com relação a um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  é dado por:*

$$w(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - P},$$

onde  $\mathbb{R}^2$  é identificado com  $\mathbb{C}$  para cálculo da integral complexa.

A orientação da curva  $\gamma$  desempenha um papel fundamental na definição do número de rotação. Se  $w(\gamma, P)$  é diferente de zero,  $P$  pertence à região interior definida por  $\gamma$ . Caso contrário,  $P$  está na região exterior. Esta é uma regra comumente utilizada em vários algoritmos em Computação Gráfica e é o padrão de algumas linguagens de *rendering* como PostScript<sup>©</sup>. Outra regra possível utiliza decisões do tipo par-ímpar para decidir pertinência.

Para a versão geométrica de número de rotação, seja  $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$  dado e considere-se a função  $\mathcal{W}_{\varepsilon} : \Lambda^2 \times \Lambda^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  definida a seguir.

- $\mathcal{W}_{\varepsilon} : \Lambda_0^2 \times \Lambda^2 \cup \Lambda^2 \times \Lambda_0^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{W}_{\varepsilon}(L^1, L^2) = 0$

- $\mathcal{W}_{\varepsilon} : \Lambda_1^2 \times \Lambda_1^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} \varphi(L^1) \cap \varphi_{\varepsilon}(L^2) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{W}_{\varepsilon}(L^1, L^2) = 0 \\ \varphi(L^1) \cap \varphi_{\varepsilon}(L^2) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{W}_{\varepsilon}(L^1, L^2) = \\ \text{sgn}((\Delta(L^1) \times \Delta(L^2))^z) \end{cases}$$

onde  $(\Delta(L^1) \times \Delta(L^2))^z$  denota a coordenada  $z$  do produto vetorial entre os vetores  $\Delta(L^1)$  and  $\Delta(L^2)$  (imersão em  $\mathbb{R}^3$  está implícita),  $\varphi(L)$  é a imersão usual em  $\mathbb{R}^2$ , que representa o segmento de reta  $\overline{L(0)L(1)}$ , e  $\varphi_{\varepsilon}(L) = \varphi(L) + \varepsilon$ .

- $\mathcal{W}_{\varepsilon} : \Lambda_{n_1}^2 \times \Lambda_{n_2}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , para  $n_1 > 1$  ou  $n_2 > 1$ , por:  
 $\mathcal{W}_{\varepsilon}(L^1, L^2) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_{\varepsilon}(\langle L_i^1, L_{i+1}^1 \rangle, \langle L_j^2, L_{j+1}^2 \rangle)$

Tomando-se  $\varepsilon$  como os pares  $\varepsilon = (q, r)$  ou  $\varepsilon = (r, q)$ , onde  $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$  and  $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , Corthout e Pol mostraram que  $\varepsilon \notin \varphi(L)$ , para toda  $L \in \Lambda_1^2$ . Utilizando esta restrição sobre  $\varepsilon$ , prova-se que

$$\mathcal{W}_{\varepsilon}(L^1, L^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_{\varepsilon}(L_{n_2}^2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_{\varepsilon}(L_0^2)}$$

e

$$\mathcal{W}_{\varepsilon}(L^2, L^1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varepsilon}(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi(L_{n_2}^2)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\varepsilon}(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi(L_0^2)}$$

, onde  $L^1$  é uma lista fechada<sup>1</sup>. Com  $\varepsilon$  definido como acima,  $\mathcal{W}_{\varepsilon}$  é chamada uma *função cross-weight*. É importante ressaltar que, a menos da exigência de manipulação de números irracionais, a versão geométrica é bem mais homogênea e viável para implementação.

A partir desta relação entre as versões analítica e geométrica, Corthout and Pol tomaram a forma polar  $\varepsilon = (r, \rho)$  e provaram a seguinte versão discreta do Teorema de Jordan para curvas discretas não-simples:

**Teorema 4.1 (Corthout and Pol).** *Seja  $\rho$  um ângulo com tangente irracional. Dada qualquer lista fechada  $L^1$ , a função cross-weight  $\mathcal{W}_{\rho}$  divide o plano discreto  $\mathbb{Z}^2$  em um número finito de regiões formadas por pontos  $P$  com números de rotação iguais a*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_{\rho}(P)}.$$

Especificamente, uma destas regiões é infinita e contém os pontos com número de rotação nulo. Além disso, quando uma lista  $L^2$  de tamanho  $n_2$  implicar em

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_{\rho}(L_0^2)} \neq \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(L^1)} \frac{dz}{z - \varphi_{\rho}(L_{n_2}^2)},$$

, então necessariamente  $\varphi(L^1) \cap \varphi(L^2) \neq \emptyset$ .

A última asserção do teorema estabelece que, sob certas restrições, a imersão poligonal das duas listas precisa ter um ponto em comum.

Para tratar a manipulação dos números irracionais e implementar a versão geométrica, Corthout e Pol construíram a seguinte família de funções *cross-weight*:

$$F_{\rho}(L, P) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{\rho}(L, \langle Q, P \rangle).$$

<sup>1</sup>Aqui, novamente  $\mathbb{R}^2$  é identificado como  $\mathbb{C}$  para cálculo da integral complexa de linha.

A notação  $\langle Q, P \rangle$  representa a lista horizontal com extremos em  $Q$  e  $P$ . Através do limite  $Q \rightarrow \infty$ , está sendo construída uma perturbação de uma semi-reta discreta infinita para contar interseções. O próximo passo apresenta uma função de rasterização que limita os efeitos da perturbação:

$$F(L, P) = \lim_{\rho \uparrow 0} F_\rho(L, P).$$

É importante ressaltar que  $\rho$  é tomado infinitesimalmente pequeno sobre os irracionais, o que garante que a perturbação não desloca pontos inteiros para outros inteiros e nem altera a pertinência original dos pontos.

Como  $F(L, P)$  distribui sob concatenações de listas, o primeiro passo para implementação é reduzir o problema a listas de tamanho 1, ou seja, a pequenos segmentos discretos:

WINDINGNUMBER2D(List  $L$ , Point  $P$ )

```

1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\langle L_i, L_{i+1} \rangle$  in  $L$ 
3  do  $w \leftarrow w + \text{CONTRIBUTION2D}(\langle L_i, L_{i+1} \rangle - P)$ 
4  return  $w$ 

```

O passo (3) computa a contribuição de cada segmento para o número de rotação. A translação de cada elemento da lista é para acelerar o cálculo da função CONTRIBUTION2D, que calcula a contribuição de cada termo da decomposição de  $F(L, P)$ . Os elementos utilizados na computação de cada segmento estão representados na Figura 2.

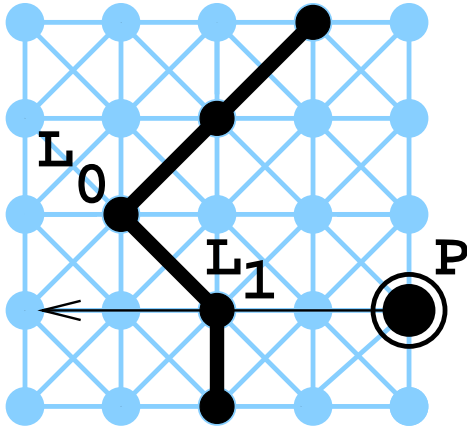


Figura 2: Elementos para computação da função CONTRIBUTION2D.

A computação do valor gerado por cada termo de  $F(L, P)$  é dada pelos seguintes resultados:

**(R1)** Se  $(P^y > \max\{L_i^y\} \vee P^y \leq \min\{L_i^y\} \vee P^x < \min\{L_i^x\})$  então  $F(L, P) = 0$ .

**(R2)** Se  $(P^y < \max\{L_i^y\} \wedge P^y > \min\{L_i^y\} \wedge P^x \geq \max\{L_i^x\})$  então  $F(L, P) = \text{sgn}(L_0^y - L_1^y)$ .

**(R3)** Seja  $\min\{L_i^y\} < P^y \leq \max\{L_i^y\}$  e  $\min\{L_i^x\} \leq P^x < \max\{L_i^x\}$  e  $l$  a reta-suporte do segmento  $L$ .

**(R3.1)** Se  $l$  é paralela ao eixo  $x$ , então  $F(L, P) = 0$ .

**(R3.2)** Se  $l$  não é paralela ao eixo  $x$ , então  $\Delta(L)^y \neq 0$ . Seja  $v$  um vetor perpendicular a  $l$ , tal que  $v^x > 0$ :  $v = +-(\Delta(L)^y, -\Delta(L)^x)$ . Tomando-se  $c = L_0 \cdot v$ ,  $l$  é descrita por  $(x, y) \cdot v = c$ . Assim, tem-se os casos finais:

$$P \cdot v \geq c \Rightarrow F(L, P) = \text{sgn}(L_0^y - L_1^y)$$

$$P \cdot v < c \Rightarrow F(L, P) = 0$$

A função Contribution2D simplesmente implementa cada um dos resultados anteriores e, seu corpo, será omitido neste artigo. Sua complexidade é  $O(n)$ , onde  $n$  é o tamanho da lista e é ótima, pois o problema de pertinência bidimensional tem cota inferior  $\Omega(n)$ .

Operações gráficas típicas que poderiam utilizar a função de pertinência WINDINGNUMBER2D(L,P) incluem *filling*, *stroking* e *antialiasing*. Fabris *et al.* [5, 6] reduziram a complexidade quadrática de utilização desta função para as operações citadas a patamares sub-lineares, através de procedimentos de coerência de regiões que utilizaram extensivamente a versão discreta do Teorema de Jordan.

## 5 Pertinência Tridimensional

Esta seção inicia a extensão do método de pertinência de Corthout e Pol. A construção do método segue um princípio semelhante: constrói-se uma versão geométrica com perturbação e prova-se sua equivalência com a versão analítica do número de rotação.

O problema de pertinência tridimensional é formulado como:

**Problema 5.1.** Dada uma hipersuperfície discreta 2-dimensional  $\Omega$ , ou simplesmente uma superfície discreta fechada, e um ponto  $P \in \mathbb{Z}^3$ , decidir se  $P$  pertence ao interior de  $\Omega$ .

A definição analítica de número de rotação bidimensional não pode ser facilmente estendida para o espaço tridimensional porque não existe uma versão tridimensional para números complexos. Assim, será necessária a utilização da Integral de Kronecker [13]:

**Definição 5.1.** Seja  $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada, suave por partes e sem bordo, e um ponto  $P \in \mathbb{R}^3$  não contido no traço de  $s(u, v)$ . O número de rotação  $w(s, P)$  de  $s$  em relação a  $P$  é dado pela seguinte fórmula:

$$\frac{-1}{4\pi} \iint_A \frac{\det[s(u, v) - P, D_1s(u, v), D_2s(u, v)]}{|s(u, v) - P|^3} dudv.$$

Essencialmente, a integral dupla acima faz uma soma de volumes sinalizados, definidos por uma decomposição simplicial de  $s(u, v)$ . Esta integral é muito similar àquela utilizada no cálculo de ângulos sólidos.

Para a versão geométrica, é definida a seguinte função *cross-weight* tridimensional:

**Definição 5.2.** *Seja  $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ ,  $\varepsilon \notin \varphi(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$ , onde  $\varphi(\Omega)$  denota imersão canônica de  $\mathbb{Z}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ . Defina-se a função  $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega^{2,3} \times \Lambda^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  por:*

- $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega^{2,3} \times \Lambda_0^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = 0$
- $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega_1^{2,3} \times \Lambda_1^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ 

$$\begin{cases} \varphi(\Omega) \cap \varphi_\varepsilon(L) = \emptyset \implies \mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L^1) = 0 \\ \varphi(\Omega) \cap \varphi_\varepsilon(L) \neq \emptyset \implies \mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L^1) = \text{sgn}(\vec{\Omega} \cdot \Delta(L)) \end{cases}$$
- $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega_{n_1}^{2,3} \times \Lambda_{n_2}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n_1, n_2 \geq 2$ , e  $\Omega = \bigcup_{i=0}^{n_1-1} \tau_i$ ,  $\tau_i \in \Omega_1^{2,3}$

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_\varepsilon(\tau_i, \langle L_j, L_{j+1} \rangle).$$

Esta definição estabelece que se uma  $\varepsilon$ -imersão  $\varphi_\varepsilon(L)$  de uma 1-célula  $L$  possui intersecção com a imersão de alguma 2-célula  $\varphi(\Omega)$ , altera-se o número de rotação pela orientação relativa entre  $\Omega$  e  $L$ . O próximo resultado mostra a relação entre as versões analítica e geométrica:

**Proposição 5.1.** *Seja  $\Omega \in \Omega^{2,3}$  uma superfície discreta fechada e  $L \in \Lambda^3$  uma lista fechada. Se  $\varepsilon \notin \varphi(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$ , então:*

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_n)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_0)).$$

A condição  $\varepsilon \notin \varphi(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \in \Omega^{2,3}$ , é equivalente a exigir que qualquer perturbação  $\varepsilon$  não esteja contida num hiperplano contínuo gerado por qualquer tripla de pontos inteiros não-colineares. Um caso especial de perturbações  $\varepsilon$  que satisfaçam à condição anterior é obtida tomando-se  $\varepsilon$  em coordenadas esféricas  $\varepsilon = (r, \rho_0, \rho_1)$ , com  $r$  infinitesimalmente pequeno e  $\rho_0$  e  $\rho_1$  ângulos com tangentes irracionais.

A proposição anterior permite a construção da seguinte versão discreta do Teorema de Jordan-Bröwer tridimensional:

**Teorema 5.1.** *Seja  $\varepsilon$  uma direção em  $\mathbb{R}^3$  não contida em qualquer plano contínuo gerado por triplas de pontos inteiros não-colineares. Dada uma superfície discreta fechada  $\Omega$ , a função *cross-weight*  $\mathcal{W}_\varepsilon$  separa o plano discreto  $\mathbb{Z}^3$  em um número finito de regiões formadas por pontos  $P$  com o mesmo número de rotação*

$$w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(P)).$$

*Precisamente uma destas regiões, com pontos de número de rotação nulo, é infinita. Além disso, para qualquer lista  $L \in \Lambda^3$ , se  $w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_0)) \neq w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_n))$  então  $\varphi(\Omega) \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ .*

Para implementar a função  $\mathcal{W}_\varepsilon$ , é necessário escolher uma direção  $\varepsilon$ . Considere-se a direção em coordenadas esféricas  $\varepsilon = (r, \rho_0, \rho_1)$  e a função *cross-weight* associada por  $\mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}$ .

**Definição 5.3.** *Defina-se  $\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1} : \Omega^{2,3} \times \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  por:*

$$\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P) = \lim_{Q \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, \langle Q, P \rangle).$$

A construção desta função segue o mesmo princípio bidimensional, ou seja, contar intersecções sinalizadas entre uma semi-reta discreta e a superfície. Tomando-se um duplo limite sobre os irracionais, obtém-se uma nova função *cross-weight*  $\mathcal{F}(\Omega, P)$ :

**Proposição 5.2.** *Seja  $\mathcal{F} : \Omega^{2,3} \times \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por:*

$$\mathcal{F}(\Omega, P) = \lim_{\rho_0, \rho_1 \uparrow 0} \mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P).$$

Então  $\mathcal{F}(\Omega, P)$  é uma função *cross-weight*.

O método tridimensional, então, consiste na implementação de  $\mathcal{F}(\Omega, P)$ . Inicialmente, observe-se que  $\mathcal{F}(\Omega, P)$  é distributiva sobre concatenações de listas e uniões de células, permitindo a construção do seguinte algoritmo:

WINDINGNUMBER3D(*DiscreteSurface*  $\Omega$ , *Point*  $P$ )

```

1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\tau_i$  in  $\Omega$ 
3  do  $w \leftarrow w + \text{CONTRIBUTION3D}(\tau_i - P)$ 
4  return  $w$ 

```

Novamente, a translação  $\tau_i - P$  tem o objetivo de acelerar a computação de contribuição de cada célula para o número de rotação. A função CONTRIBUTION3D é uma implementação direta da função *cross-weight*  $\mathcal{F}(\Omega, P)$  e é baseada nos resultados apresentados a seguir.

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que o ponto testado é sempre a origem,  $\mathcal{O}$ , uma vez que o número de rotação é invariante a translações. O primeiro caso é o mais simples em termos de implementação:

**Proposição 5.3.** *Seja  $\tau_i \in \Omega_1^{2,3}$  contido em um hiperplano discreto tridimensional  $\mathcal{H}$ . Se  $\mathcal{H}$  é paralelo ao eixo  $z$ , então  $\mathcal{F}(\tau_i, \mathcal{O}) = 0$ .*

Se o hiperplano não é paralelo ao eixo  $z$ , então existem dois casos, cobertos pelas duas próximas proposições.

**Proposição 5.4.** *Seja  $\tau_i \in \Omega_1^{2,3}$  contido em um hiperplano discreto  $\mathcal{H}$ . Se  $\mathcal{H} \cap \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}\} = \{Q\}$ , então:*

- Se  $Q^{x_3} > 0$ , então  $\mathcal{F}(\tau_i, \mathcal{O}) = 0$ .
- Se  $Q^{x_3} \leq 0$ , então:
  - Se  $Q \in \tau_i$ , então  $\mathcal{F}(\tau_i, \mathcal{O}) = \text{sgn}(\vec{\tau}_i \cdot (0, 0, -1))$ ;
  - Se  $Q \notin \tau_i$ , então  $\mathcal{F}(\tau_i, \mathcal{O}) = 0$ .

Não é difícil observar que  $Q \in \tau_i$  é uma instância do problema de pertinência bidimensional.

**Proposição 5.5.** *Seja  $\tau_i \in \Omega_1^{2,3}$  contido em um hiperplano discreto  $\mathcal{H}$ . Se  $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{H}$ , então  $\mathcal{F}(\tau_i, \mathcal{O}) = 0$ .*

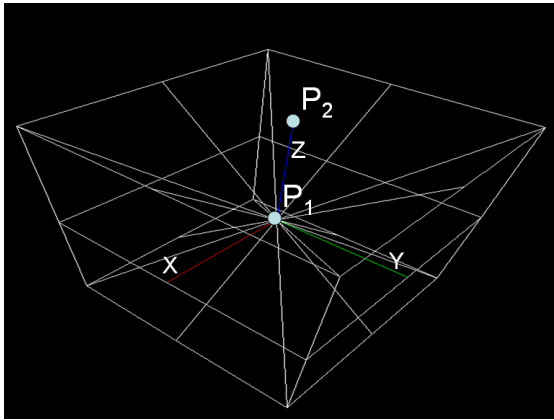
As proposições anteriores cobrem todos os casos possíveis de contribuição de uma célula para o número de rotação da origem. Assim, a função CONTRIBUTION3D realiza os testes descritos em cada uma delas:

```

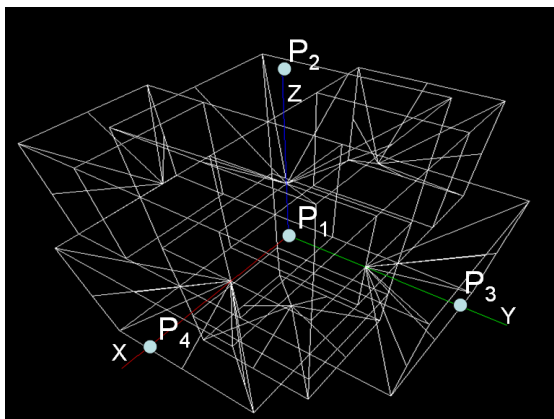
CONTRIBUTION3D(Cell  $\tau$ )
1   $\mathcal{H} \leftarrow \text{HYPERPLANE}(\tau)$ 
2  if  $\mathcal{H} \cap \{(0,0,z) : z \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$   $\triangleright$  Proposição 5.3
3  then return 0
4  else if  $(0,0,0) \in \mathcal{H}$  and  $(0,0,1) \in \mathcal{H}$   $\triangleright$  Proposição 5.4
5  then return 0
6  else  $Q \leftarrow \mathcal{H} \cap \{(0,0,z) : z \in \mathbb{Z}\}$   $\triangleright$  Proposição 5.5
7  if  $Q^{x_3} \leq 0$ 
8  then  $\tau_{proj} \leftarrow \text{PROJECTIONXY}(\tau)$ 
9  if  $\text{WINDINGNUMBER2D}(\tau_{proj}, (0,0)) \neq 0$ 
10 then return  $\text{sgn}(\vec{\tau} \cdot (0,0,-1))$ 
11 else return 0
12 else return 0

```

Finalmente, alguns resultados sobre a implementação são exibidos a seguir. A Figura 3 mostra algumas classificações de pertinência em superfícies discretas tridimensionais com auto-intersecção:



(a) intersecção simples



(b) intersecção mais complexa

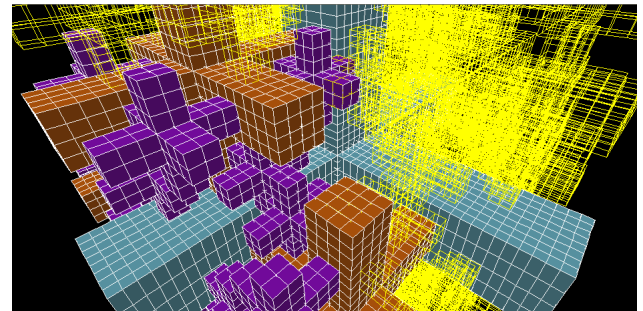
Figura 3: Pertinência tridimensional contra superfícies discretas com auto-intersecção.

No primeiro caso (a), the ponto  $P_1$  (origem) está na intersecção de 12 células(seis superiores e seis inferiores). Através da perturbação  $\varepsilon$ , o ponto foi transladado

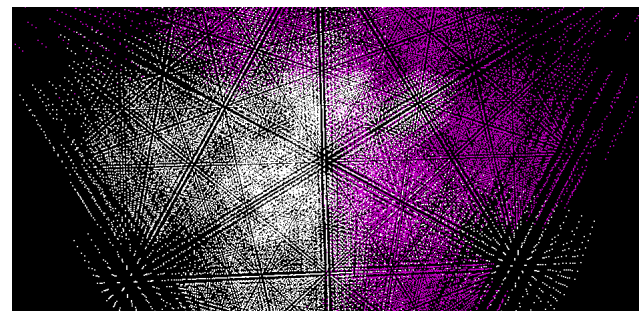
da intersecção para o exterior, no sentido positivo do eixo  $z$ . No contagem das intersecções, são encontradas somente duas células que contribuem com os números +1 e -1, os quais, na soma final, geram resultado zero, ou seja, o ponto está no exterior, como esperado. O ponto  $P_2$ , embora não esteja na intersecção das células, também produz número de rotação nulo, que o classifica também como ponto exterior.

O caso (b) exhibe uma situação mais complexa, onde uma superfície discreta é formada pela união de três blocos básicos de mesma natureza. Novamente, a origem ( $P_1$ ) foi testada. O número de rotação resultante foi +3, classificando o ponto como interior. Na realidade, não é difícil observar que existem somente três células que contribuem para o número de rotação de  $P_1$ , cada qual contribuindo com +1, com orientação das células para o exterior. Cada um dos outros pontos  $P_2$ ,  $P_3$  and  $P_4$  retornaram número de rotação zero, classificando-os como pontos exteriores, como esperado.

A Figura 4 exhibe a habilidade da técnica em tratar geometria complexas. A superfície discreta exibida em (a) foi gerada por um procedimento recursivo, semelhante ao encontrado em fractais, e contém várias auto-intersecções. Resultados de classificação de pontos para um volume limitante da superfície são exibidos em (b).



(a) superfície recursiva



(b) pontos classificados

Figura 4: Classificação de pontos em uma geometria complexa.

Em particular, classificações como as apresentadas na Figura 4, são de extrema importância para *rendering* e modelagem baseados em pontos.

## 6 Pertinência $d$ -dimensional, $d \geq 4$

A partir do resultado obtido no caso tridimensional, extensões para dimensões mais altas podem ser facilmente obtidas. A versão analítica do número de rotação  $d$ -dimensional é novamente definido pela Integral de Kronecker  $d$ -dimensional [13]:

**Definição 6.1.** *Seja  $s : A \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma superfície parametrizada, suave por partes e sem bordo, e  $P \in \mathbb{R}^d$  um ponto não contido no traço  $s(u) = (s_1(u), \dots, s_d(u))$ ,  $u \in A$ . O número de rotação  $w(s, P)$  de  $s$  com relação a  $P$  é dado pela fórmula:*

$$(-1)^d \frac{1}{A_{d-1}(1)} \int_A \frac{\det[s(u) - P, D_1 s(u), \dots, D_{d-1} s(u)]}{|s(u) - P|^d} du_1 \dots du_{d-1},$$

onde  $A_{d-1}(1)$  representa a área da esfera unitária  $(d-1)$ -dimensional.

A interpretação de  $w(s, P)$  é a mesma: soma de volumes sinalizados. A versão geométrica também constrói uma função *cross-weight* semelhante:

**Definição 6.2.** *Seja  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{3d}$ ,  $\varepsilon \notin \varphi(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \in \Omega^{d-1,d}$ , onde  $\varphi(\Omega)$  a imersão canônica de  $\mathbb{Z}^d$  em  $\mathbb{R}^d$ . Defina-se a função  $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega^{d-1,d} \times \Lambda^d \rightarrow \mathbb{Z}$  por:*

- $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega^{d-1,d} \times \Lambda_0^d \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = 0$
  - $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega_1^{d-1,d} \times \Lambda_1^d \rightarrow \mathbb{Z}$
- $$\begin{cases} \varphi(\Omega) \cap \varphi_\varepsilon(L) = \emptyset \implies \mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = 0 \\ \varphi(\Omega) \cap \varphi_\varepsilon(L) \neq \emptyset \implies \mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = \text{sgn}(\vec{\Omega} \cdot \Delta(L)) \end{cases}$$
- $\mathcal{W}_\varepsilon : \Omega_{n_1}^{d-1,d} \times \Lambda_{n_2}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n_1, n_2 \geq 2$ ,  $e \Omega = \bigcup_{i=0}^{n_1-1} \tau_i$ ,  $\tau_i \in \Omega_1^{d-1,d}$

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \mathcal{W}_\varepsilon(\tau_i, \langle L_j, L_{j+1} \rangle).$$

A relação entre as versões analítica e geométrica do número de rotação é dada pela proposição a seguir:

**Proposição 6.1.** *Seja  $\Omega \in \Omega^{d-1,d}$  uma hipersuperfície discreta fechada e  $L \in \Lambda^d$  uma lista fechada. Se  $\varepsilon \notin \varphi(\Omega)$ ,  $\forall \Omega \in \Omega^{d-1,d}$ , então:*

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\Omega, L) = w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_n)) - w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_0)).$$

Novamente, a proposição anterior permite provar uma versão discreta do Teorema de Jordan-Bröwer, agora válida para qualquer dimensão inteira:

**Teorema 6.1.** *Seja  $\varepsilon$  uma direção em  $\mathbb{R}^d$  não contida em qualquer hiperplano gerado por  $d$ -uplas de pontos inteiros não-colineares. Dada uma hipersuperfície discreta  $\Omega$ , fechada e orientável, a função *cross-weight*  $\mathcal{W}_\varepsilon$  separa o plano discreto  $\mathbb{Z}^d$  em um número finito de regiões contendo pontos  $P$  com o mesmo número de rotação:*

$$w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(P)).$$

*Somente uma destas regiões é infinita e contém pontos com número de rotação nulo. Além disso, para qualquer lista  $L \in \Lambda^d$ , se  $w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_0)) \neq w(\varphi(\Omega), \varphi_\varepsilon(L_n))$  então  $\varphi(\Omega) \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ .*

Tomando-se  $\varepsilon$  em coordenadas esféricas generalizadas  $\varepsilon = (r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})$ , com  $r$  suficientemente pequeno, e  $\rho_i$ ,  $i = 0, \dots, d-2$ , ângulos com tangente irracional, satisfaz-se os requisitos do teorema anterior e disponibiliza-se um ambiente para cálculo de  $\mathcal{W}_\varepsilon$ . Novamente,  $\mathcal{W}_{(r, \rho_0, \dots, \rho_{d-2})}$  será denotada por  $\mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$ .

**Definição 6.3.** *Defina-se a função de rasterização  $d$ -dimensional  $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}} : \Omega^{d-1,d} \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$  por:*

$$\mathcal{F}_{\rho_0, \rho_1}(\Omega, P) = \lim_{Q \rightarrow -\infty} \mathcal{W}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, \langle Q, P \rangle).$$

Usando-se a função  $\mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}$  acima e tomando-se a seqüência de  $(d-1)$  limites sobre os irracionais, obtém-se a seguinte função *cross-weight*  $\mathcal{F}(\Omega, P)$ :

**Proposição 6.2.** *Seja  $\mathcal{F} : \Omega^{d-1,d} \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por:*

$$\mathcal{F}(\Omega, P) = \lim_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2} \uparrow 0} \mathcal{F}_{\rho_0, \dots, \rho_{d-2}}(\Omega, P).$$

Então  $\mathcal{F}(\Omega, P)$  é uma função *cross-weight*.

O método de pertinência generalizado implementa  $\mathcal{F}(\Omega, P)$  e usa, inicialmente, a propriedade de distribuição sobre concatenação de listas e uniões de células:

```

WINDINGNUMBER(D)D(DiscreteHypersurface  $\Omega$ , Point  $P$ )
1   $w \leftarrow 0$ 
2  for each  $\tau_i$  in  $\Omega$ 
3  do  $w \leftarrow w + \text{CONTRIBUTION(D)D}(\tau_i - P)$ 
4  return  $w$ 

```

Resultados para provar a corretude da função CONTRIBUTION(D)D são análogos ao caso tridimensional e serão omitidos. Assim, a CONTRIBUTION(D)D pode ser dada por:

```

CONTRIBUTION(D)D(Cell  $\tau$ )
1   $\mathcal{H} \leftarrow \text{HYPERPLANE}(\tau)$ 
2  if  $\mathcal{H} \cap \{(0, \dots, z) : z \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$ 
3  then return 0
4  else if  $(0, \dots, 0) \in \mathcal{H}$  and  $(0, \dots, 1) \in \mathcal{H}$ 
5  then return 0
6  else  $Q \leftarrow \mathcal{H} \cap \{(0, \dots, z) : z \in \mathbb{Z}\}$ 
7  if  $Q^{x_d} \leq 0$ 
8  then  $\tau_{proj} \leftarrow \text{PROJECTION}_{X_1 \dots X_{d-1}}(\tau)$ 
9  if  $\text{WINDINGNUMBER(D-1)D}(\tau_{proj}, (0, \dots, 0)) \neq 0$ 
10 then return  $\text{sgn}(\vec{\tau} \cdot (0, \dots, -1))$ 
11 else return 0
12 else return 0

```

A função PROJECTION $X_1 \dots X_{d-1}$ ( $\tau$ ) realiza a projeção ortogonal de  $\tau$  no sub-espaço  $\mathbb{Z}^{(d-1)}$ . Nesta implementação, fica extremamente clara a natureza recursiva das computações e, principalmente, a redução de dimensão para simplificar os cálculos.

## 7 Conclusões e Trabalhos Futuros

Predicados de pertinência de pontos representam operações muito elementares para várias aplicações em Computação Gráfica, principalmente para aquelas que dependem de algoritmos baseados em imagem. O desenvolvimento de teoria e métodos que garantam robustez geométrica e numérica, eficiência e, principalmente, que alcancem geometrias complexas, é de grande interesse computacional.

Este artigo apresentou um método generalizado para decidir pertinência de pontos em hipersuperfícies discretas de dimensão arbitrária. Em particular, tanto robustez geométrica quanto numérica foram garantidas *a priori*. Adicionalmente, o método possui baixa complexidade e exige estruturas de dados muito simples, o que o torna muito viável para implementações em *hardware*.

O método apresentado pode ser estendido tanto na direção teórica quanto em requisitos mais práticos. Do ponto de vista teórico, a extensão para geometrias ainda mais complexas, como NURBS ou superfícies de subdivisão discretas poderia disponibilizar ferramentas poderosas para aplicações que dependam de modelagem baseadas em pontos. Numa linha mais prática, otimizações locais baseadas em igualdade de números de rotação em determinadas regiões poderiam ser exploradas, de tal modo a aumentar a eficiência de utilização do método proposto.

## Referências

- [1] R. Ayala, A.R. Francés, A. Quintero, e R. Rubio. On surfaces in digital topology. In *5th Colloquium on Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'95*, pp. 271–276, 1995.
- [2] R. Ayala, A.R. Francés, A. Quintero, e R. Rubio. Determining the components of the complement of a digital  $(n - 1)$ -manifold in  $\mathbb{Z}^n$ . In *6th Colloquium on Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI'96*, pp. 163–176, 1996.
- [3] M.E.A. Corthout e E.J.D. Pol. *Point Containment and the Pharos Chip*. PhD thesis, Leiden University, the Netherlands, 1992.
- [4] H. Edelsbruner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.
- [5] A.E. Fabris, L. Silva, e A.R. Forrest. An efficient filling algorithm for non-simple closed curves using the point containment paradigm. In *SIBGRAP'97 Conference Proceedings*, pp. 2–9, 1997.
- [6] A.E. Fabris, L. Silva, e A.R. Forrest. Stroking polynomial discrete bézier curves via point containment paradigm. In *SIBGRAP'98 Conference Proceedings*, pp. 110–118, 1998.
- [7] F.R. Feito e J.C. Torres. Inclusion test for general polyedra. *Computer and Graphics*, 21(1), pp. 23–30, 1997.
- [8] A.R. Forrest. *Computational geometry in practice*, pp. 707–724. *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*. Springer-Verlag, 1985.
- [9] L.J. Guibas, L.H. Ramshaw, e J. Stolfi. A kinetic framework for computational geometry. In *24th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*, pp. 100–111, 1983.
- [10] V. Guillemin e A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [11] D.G. Morgenthaler e A. Rosenfeld. Surfaces in three-dimensional images. *Information and Control*, 51, pp. 227–247, 1981.
- [12] B.P. Palka. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [13] G.B. Price. *Multivariable Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [14] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [15] G.Y. Tang. Region filling with the use of the discrete green theorem. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 42, pp. 297–305, 1988.