Estabilização da geração de colunas aplicada no problema de corte unidimendional de tamanhos variados

Marcos N. Arenales, **Marco Antonio L. P. Lopes.***

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC, USP

Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Caixa Postal 668.

E-mail: arenales@icmc.usp.br, malpl@icmc.usp.br.

15/07/2005

RESUMO

O problema de corte de estoque consiste em cortar objetos maiores, disponíveis em estoque, para produzir uma quantidade requisitada de peças menores, de modo que uma certa função objetivo seja otimizada. Um modelo de otimização linear tem sido amplamente utilizado na solução deste problema desde os anos 60, que incorpora parte da estrutura combinatória inerente ao problema na construção das colunas da matriz de restrições, a qual tem um número muito grande de colunas. O método simplex com geração de colunas tem sido empregado para a resolução desse modelo, embora apresente baixa convergência quando próximo da otimalidade, pouco melhorando a função objetivo. Assim, estratégias para a aceleração do Método Simplex são necessárias e uma das maneiras consiste na exploração do espaço dual, com a introdução de restrições (colunas no primal) que evite grandes variações nas variáveis duais. Neste artigo são generalizadas restrições duais da literatura. Palavras-chave: problema de corte de estoque, geração de colunas, espaço dual.

ABSTRACT

The cutting stock problem consists of cutting large available objects to produce a specific quantity of ordered small items, in such a way as to optimize a given objective function. A Linear Optimization problem has been greatly used to solve this problem since the 60s, in which part of the combinatorial structure is embedded. The Simplex Method with column generation is used to solve that model, although it presents a low convergence near to optimality. Therefore, strategies to accelerate the Simplex Method are welcome which can be obtained by adding dual cuts (primal columns). In this paper we extend published dual cuts. Key-words: cutting stock problem, column generation, dual space.

*bolsista de Mestrado FAPESP

1 Introdução

A otimização do processo de corte de peças maiores, disponíveis em estoque, para a produção de peças menores, em quantidades encomendadas, tem sido objeto de estudo há quatro décadas, desde os trabalhos pioneiros de Gilmore e Gomory [4, 5 e 6], os quais podemos destacar o Método Simplex com geração de colunas para um modelo de otimização linear (uma aproximação do problema) que, pela primeira vez, resolveu problemas grandes de corte unidimensional com solução ótima. Em 1963 os mesmos autores apresentaram um novo método para o problema da mochila e resolveram um estudo de caso no corte de papel. Apresentaram também um novo modelo para balancear a carga nas máquinas, o qual é hoje usado para tratar problemas com objetos em estoque de diferentes tamanhos. Desde então várias modificações foram inseridas no processo de geração de colunas original. No inicio da década de 80, foram propostas algumas modificações por Haessler [7]. Tais modificações se referem aos procedimentos que geram a solução inicial e na geração dos padrões a entrar na base. Segundo o autor, controlar a geração dos padrões a entrar na base e usar uma formulação mais restrita, porém menos eficiente, do problema da mochila, ajuda a reduzir problemas de arredondamento e mudanças de padrões de corte. Merle [11] sugeriu um método baseado no método de boxstep de Marsten [10], o qual tende a deixar as variáveis duais, a cada iteração, restritas a um intervalo definido na iteração anterior. Ben Amor et. al. [3] propôs um método baseado na teoria da região de confiança, a qual penaliza as variáveis duais caso não pertençam a essa região. Neste mesmo artigo o autor cita um método generalizado que contém o método de Boxstep. Mais recentemente, Ben Amor *et. al.* [2] e Carvalho [13] propõem novas restrições para o espaço dual. Restrições mais simples foram utilizadas por

Gilmore e Gomory em 1961, de modo a evitar bruscas variações (instabilidade) nas soluções duais, objetivando acelerar o método de geração de colunas.

2 O problema de corte de estoque

O problema de corte de estoque unidimensional (apenas uma dimensão é relevante no processo de corte) pode ser definido da seguinte forma:

Consideramos um número grande de objetos (como por exemplo, rolos de papel - bobinas, canos(PVC)) de comprimentos $L_k, \quad k = 1, ..., K$ que devem ser cortados para a produção de um conjunto de itens de comprimentos $l_i \quad (l_i \leq L_k)$ e demanda $b_i, \quad i = 1, ..., m$ de modo que uma função objetivo seja minimizada. Várias funções objetivos têm sido utilizadas na literatura. Neste trabalho utilizamos a perda como função objetivo.

2.1 Definição e formulação matemática

O modelo de Gilmore e Gomory de 1963 será utilizado para o problema de corte de estoque o qual está descrito abaixo.

Definição1.1 Chamamos de padrão de corte a maneira pela qual um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens demandados. A um padrão de corte associamos um vetor m-dimensional que contabiliza os itens produzidos: $ai_k = (a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk})^T$ *em que* a_{ik} *é a quantidade de itens do tipo i, no padrão de corte do objeto K.*

Um padrão de corte a_k deve satisfazer a restrição física de capacidade de uma mochila:

$$\begin{array}{l} l_1 a_{1k} + l_2 a_{2k} + ... + l_m a_{m_k} \leq L_k \\ 0 \leq a_{ik} \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \quad k = 1, ..., K \end{array} \tag{1}$$

O modelo matemático para o problema de corte de estoque é dado a seguir.

Dados de Entrada:

- m: número de tipos de itens;
- dimensões do item $i, \ i = 1, \cdots, m$;
- d_i: demanda do item tipo $i, \ i = 1, \cdots, m$.

Dados de estoque:

- K : número de tipos de objetos em estoque;
- dimensões do objeto $k, \ k = 1, \cdots, K$;
- c_k: custo do objeto tipo K;
- e_k: disponibilidade em estoque do objeto $k, \ k = 1, \cdots, K$.

Dados de processo:

- N_k: número de possíveis padrões de corte para o objeto $k, \ k = 1, \cdots, K$;
- a_{ijk}: número de itens do tipo i no padrão de corte j sobre o objeto k, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, N_k$, $k = 1, \cdots, K$. (a_{jk} é o vetor correspondente ao j-ésimo padrão de corte sobre o objeto k)

Variável de decisão:

- x_{jk}: número de objetos do tipo k cortados segundo o padrão j.

2.2 Modelo matemático

$$min \ \ f(x) = \sum_{j=1}^{N_1} c_1 x_{j1} + \cdots + \sum_{j=1}^{N_k} c_K x_{jK}$$

$$s.a. : \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_1} a_{j1} x_{j1} + \cdots + \sum_{j=1}^{N_K} a_{jK} x_{jK} = b \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N_1} x_{i1} \qquad \leq e_1 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N_K} x_{iN} \leq e_K \\ x_{jk} \geq 0 \ j = 1, \cdots, N_k, k = 1, \cdots, K \end{cases} \tag{2}$$

A condição de integralidade das variáveis x_j torna o problema de corte difícil, senão impossível , de ser resolvido computacionalmente. Para contornar este problema relaxamos a condição de integralidade das variáveis x_j e resolvemos o problema de otimização linear resultante pelo Método Simplex. Em problemas práticos m (que é a quantidade de tipos de itens) é da ordem de dezenas, enquanto que N (o qual depende de m, L e $l_i, i = 1, ..., m$) pode ser da ordem de milhões, o que inviabiliza a resolução direta do problema. Para contornar esta dificuldade, utilizamos o processo de geração de colunas na resolução da relaxação por otimização linear de (2). Arredondamentos heurísticos podem ser desenvolvidos para a obtenção de soluções inteiras (Wäscher e Gau, 1996, Poldi, 2002), restando um problema residual de baixa demanda, que Poldi [12] mostrou que também pode ser resolvido eficientemente pelo mesmo modelo linear. Apesar do Método Simplex com geração de colunas ser um método eficiente, sabemos que o mesmo apresenta convergência rápida, porém quando nos aproximamos da otimalidade converge lentamente para a solução ótima.

Como podemos ver na figura (1) construído pela resolução de um problema de corte de estoque (barra de comprimento 500 cm e 45 itens de vários comprimentos) resolvido pelo método de geração de colunas. Na iteração de número 170 o valor da função objetivo era de 1733 e na iteração 331 (quando a otimalidade foi encontrada) o valor da função objetivo era de 1726, notamos que a função objetivo decresceu de 7 unidades em 61 iterações. Esta característica é típica na geração de colunas e é chamada de “cauda ”(“*tail* ”).

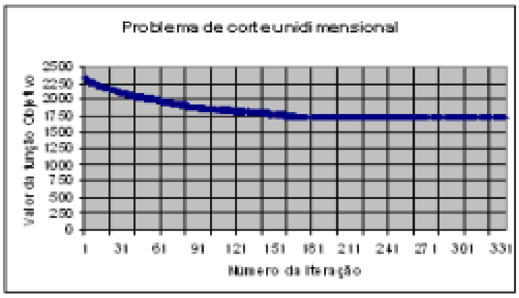

Figura 1: *Valor da função objetivo pelo número da iteração*

3 Geração de colunas e o espaço dual

Primal: Dual:

$$MinZ(x) = c^T x \qquad MaxD(x) = b^T u.$$

$$s.a. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad s.a. \begin{cases} A^T u \leq c \\ u \;\; irrestrito \end{cases}$$

Considerando uma coluna do problema primal, ou seja, um padrão de corte do problema de corte de estoque, esta coluna produzirá uma restrição no espaço dual. Considerando esta propriedade podemos descrever o método de geração de colunas da seguinte forma:

• Usar um conjunto de colunas primais, ou restrições duais para iniciar o problema;

• A cada iteração, novas restrições duais são inseridas no modelo eliminando soluções infactíveis;

• O espaço dual é restrito até encontrarmos a solução desejada.

A estratégia sugerida por Carvalho consiste em introduzir um número polinomial de restrições duais de tal forma que o espaço em questão fique mais restrito. Introduzindo restrições do tipo $\pi D \leq d$, temos o seguinte par primal-dual estendido:

Primal estendido: Dual estendido:

$$MinZ(x) = c^T x \qquad MaxD(x) = b^T u.$$

$$s.a. \begin{cases} Ax + Dy = b \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases} \qquad s.a. \begin{cases} \pi A \leq c \\ \pi D \leq d \\ \pi \;\; irrestrito \end{cases}$$

Podemos ver que Gilmore e Gomory [4] já utilizaram esta estratégia da seguinte forma:

A partir do problema inicial podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$MinZ(x) = c^T x \qquad MinZ(x) = c^T x + s^T y$$

$$s.a. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad s.a. \begin{cases} Ax + Dy = b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Analisando a restrição dual gerada por uma coluna da matriz D temos:

$(\pi_1, ..., \pi_i, ..., \pi_m)(0, ..., -1, ..., 0) \leq 0 \;\Rightarrow\; \pi_i \geq 0$ a qual introduz no espaço dual a restrição de não-negatividade.

3.1 Família de cortes duais de Carvalho

A teoria mostrada abaixo considera apenas um objeto em estoque, apesar da formulação se referir a vários objetos. Isso foi feito devido a maior clareza da apresentação do estudo no espaço delimitado e será mostrado na integra na apresentação oral, bem como os resultados computacionais. O estudo relativo à apenas um tipo de objeto em estoque foi submetido a SBPO de 2005.

Consideramos a aplicação da idéia de inserção de restrições do tipo $\pi D \leq d$ no problema dual. A restrição investigada por Carvalho utiliza um item para produzir itens menores, desde que a soma destes itens menores seja menor ou igual ao item inicial. Isto é, seja o item i de comprimento l_i e a coleção de subconjuntos S tal que:

$$\sum_{s \in S} \ell_s \leq \ell_i \tag{3}$$

As seguintes restrições são consideradas no espaço dual, chamadas "cortes duais":

$$-\pi_i + \sum_{s \in S} \pi_s \leq 0 \tag{4}$$

Estas restrições são inseridas no problema dual, criando o problema "dual estendido ". o respectivo problema primal, chamado "primal estendido ", pode ser resolvido por geração de colunas. A solução obtida será da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ \vdots \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + ... + \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \\ \vdots \\ \\ a_{mp} \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_1 + ... + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_r$$

Encontrada a solução temos que eliminar as variáveis relativas aos cortes duais: $y_1, y_2, ..., y_r$, em que contém p colunas associadas a padrões de corte (geradas pela resolução do problema da mochila) e colunas associadas aos cortes duais (geradas a priore, a rigor estas colunas não são geradas, um simples teste identifica se devem entrar na base).

3.2 Uma nova interpretação dos cortes duais

Por simplicidade, consideramos um corte dual simples (seção 3.1) da seguinte forma. Seja o item i e o conjunto unitário $|S| = j$ (para que seja um corte dual da família de Carvalho, $\ell_j \leq \ell_i$) e o corte dual:

$$-\pi_i + \pi_j \leq 0 \tag{5}$$

O caso em que S não é unitário, tem a mesma interpretação abaixo.

Seja o padrão de corte dado por $a_1 = (a_{11}, ..., a_{i1}, ..., a_{j1}, ..., a_{m1})$ e suponha que $a_{i1} > 0$ (i. é., o item é cortado a_{i1} neste padrão). Podemos construir um novo padrão de corte substituindo os itens i (a_{i1} vezes) por itens j (já que $l_j \leq l_i$) o qual tem a seguinte coluna associada: $a_1^{'} = (a_{11}, ..., 0, ..., a_{i1} + a_{j1}, ..., a_{m1})$.

Observe que:

$$a_1^{'} - a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -a_{i1} \\ +a_{i1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{i1} d_1 \tag{6}$$

Os elementos -1 e +1 estão nas posições i e j respectivamente. Assim, $d_1 = (0, ..., -1, ..., +1, ..., 0)^T$ é exatamente a coluna associada ao corte dual de Carvalho. Podemos interpretar os cortes duais como nas operações elementares (subtração entre colunas) nas colunas da matriz A, o que corresponde a uma mudança de variável (uma nova variável surge para a nova coluna). Observe que estas novas colunas (decorrentes dos corte duais) podem ser geradas a priore, sem a necessidade de se conhecer os padrões, como Carvalho percebeu. Esta nova interpretação, nos permite definir novas famílias de cortes (veja seção 4)

3.3 Recuperando a solução do problema primal

Tendo a solução do problema primal estendido:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + d_1 y_1 + \cdots + d_r y_r = b$$

desejamos encontrar a solução do problema primal:

$$a_1 x_1^{'} + a_2 x_2^{'} + a_3 x_3^{'} + \cdots = b$$

Para iniciar o processo tomamos o primeiro corte escolhido lexicograficamente, ou seja, cortes duais que possuem -1 na linha de menor índice estão em primeiro, e em seguida escolhemos aleatoriamente um padrão de corte que possui itens na mesma linha referente a linha do corte dual que possui o -1. Sem perda de generalidade tomamos o primeiro corte dual e escolhemos o primeiro padrão de corte, d_1 e a_1 respectivamente, com isso temos a seguinte igualdade.

$$a_1 x_1 + d_1 y_1 + \cdots = b \tag{7}$$

isolando o padrão de corte e o corte dual encontramos:

$$a_1 x_1 + d_1 y_1 = b^{'} \tag{8}$$

Primeiramente substituímos na solução (7) o corte dual (6) encontrando o seguinte:

$$a_1 \Big(x_1 - \frac{y_1}{a_{i1}} \Big) + a_2 \frac{y_1}{a_{i1}} + \cdots = b \tag{9}$$

Para a nova solução ser factível devemos ter:

$$\Big(x_1 - \frac{y_1}{a_{i1}} \Big) \geq 0 \tag{10}$$

ou seja a solução está sendo escrita como combinação liner de a_1 e a_2.

Caso isso aconteça, seguindo as atribuições abaixo, encontramos a solução do problema primal. Desta forma o processo se repete até que todos as variáveis relativas aos cortes duais sejam anuladas.

$$x_1^{'} = x_1 - \frac{y_1}{a_{i1}} \quad x_2^{'} = \frac{y_1}{a_{i1}}$$

Portanto temos a solução do problema primal

$$a_1 x_1^{'} + a_2 x_2^{'} + a_3 x_3^{'} + \cdots = b$$

Caso a desigualdade (10) não seja obedecida $b^{'}$ está sendo escrito como combinação linear de d_1 e a_2.

Em relação aos itens isto significa que o corte dual d_1 deve cortar mais peças que o padrão de corte a_1 fornece, assim o padrão de corte a_1 não será mais utilizado e o valor da variável relativa ao corte dual d_1 decresce gerando a solução abaixo.

$$d_1(y_1 - x_1 a_{i1}) + a_2 x_1 = b^{'}$$

Como o corte dual permanece na solução selecionamos outro padrão de corte para zerar a variável relativa ao corte dual. Desta forma o processo se repete até que todos as variáveis relativas aos cortes duais sejam anuladas. A quantidade de cada item não se altera durante a recuperação da solução, bem como o valor da função objetivo. Ao introduzir os cortes duais durante todo o processo da geração de colunas evitamos que mochilas sejam geradas acelerando o processo, pois os padrões já estão implicitamente na solução e são recuperados ao aplicarmos o processo acima descrito. Como os cortes duais restringem o espaço dual menos pontos estão disponíveis para o método de geração de colunas testar, evitando grandes oscilações das variáveis duais tentando assim estabilizá-lo.

4 Proposta para uma nova família de cortes duais

Propomos uma extensão dos cortes de Carvalho, ou seja, as restrições:

$$-\pi_i + \sum_{s \in S} \pi_s \leq 0 \qquad (11)$$

pela extensão:

$$-\pi_i + \sum_{s \in S} \beta_s \pi_s \leq 0 \quad \beta inteiro \qquad (12)$$

a qual substitui um item por uma combinação de itens menores cuja soma seja menor que o item inicial e não mais substituir um item por um outro menor como fez Carvalho. Podemos ver no gráfico que o semiplano definido pela restrição B ($\pi_1 \leq 2\pi_2$) restringe mais o espaço dual do que o semiplano gerado pela restrição A ($\pi_1 \leq \pi_2$) proposta por Carvalho

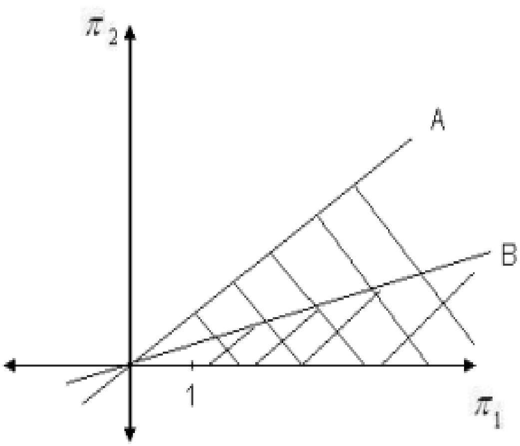

Figura 2: *Corte dual de Carvalho e a nova proposta.*

O corte dual proposto consiste numa restrição válida para o problema dual conforme o teorema abaixo.

Teorema 4.1 A nova família de cortes duais sugeridas são inequações válidas para o espaço de soluções ótimas do problema dual do problema de corte unidimensional.

5 Experimentos computacionais

Realizamos alguns testes computacionais para comparar os resultados do método de geração de colunas sem cortes duais e a geração de colunas com cortes duais. Os cortes duais introduzidos foram:

Corte GG: cortes duais do tipo Gilmore e Gomory que geram a seguinte coluna no problema primal; $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)^T$;

Corte GG e 1: cortes duais do tipo Gilmore e Gomory e cortes de Carvalho ($|S| = 1$) que geram as seguintes colunas no problema primal respectivamente; $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)^T$ e $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$;

Corte GG e 2: cortes duais do tipo Gilmore e Gomory e cortes de Carvalho com apenas dois itens ($|S| = 2$) que geram as seguintes colunas no problema primal respectivamente; $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)^T$ e $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$;

Corte GG e 3: cortes duais do tipo Gilmore e Gomory e cortes novos (seção 4, $|S| = 1$) que geram as seguintes coluna no problema primal respectivamente; $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)^T$ e $(0, ..., 0, -1, 0, ..., 0, k, 0, ..., 0)^T$, em que k é a quantidade do item menor que cabe no maior;

Corte GG, 1 e 2: é a junção do Corte 1 e 2 citados anteriormente;

Corte GG, 1, 2 e 3: é a junção do Corte GG, Corte 1, Corte 2, e Corte 3 citados anteriormente;

Corte 3: é idêntico ao Corte 3 sem utilizarmos os cortes de Gilmore e Gomory;

Os algoritmos foram implementados em Delphi 5 e os testes foram executados em um microcomputador Athlon 2.2 MHZ com 512Mb de RAM. O método de geração de colunas foi cedido por Poldi [12]. Utilizamos um gerador aleatório com as seguintes características: L=500, m=45, $l_i \in [5, 400]$ e $d_i \in [350, 600]$ (exemplares com outros parâmetros foram resolvidos, mas por limitação de espaço não apresentamos).

Na tabela abaixo encontramos os resultados.

Tabela 1: Comparação entre os tipos de cortes utilizados (Média de 10 exemplos)

Cortes	n. mochilas	n. de iterações	tempo	cauda
sem cortes	313,3	313,3	12,8	65,9
GG	179,9	252,0	2,7	1,6
GG e 1	111,2	263,5	2,8	1,2
GG e 2	46,9	579,5	2,0	2,2
GG e 3	66,1	426,6	2,8	0,8
GG, 1 e 2	43,0	517,9	1,9	3,6
GG, 1, 2 e 3	38,0	600,2	1,7	1,8
3	66,9	458,1	2,8	1,8

Pela Tabela (1) pudemos observar que o corte que aglomera todos os tipos obteve a maior redução em relação ao número de mochilas 97%. Ao analisarmos a "cauda" podemos ver que a redução da mesma está entre 73% e 90%, e por fim analisando a coluna relativa ao número de iterações podemos constatar que os cortes duais provocaram acréscimos no número de iterações do método simplex (porém resolvendo menos mochilas).

Para tentarmos contornar este problema do acréscimo do número de iterações introduzimos os cortes duais após algumas iterações. A tabela abaixo mostra o resultado da geração de colunas com os cortes, sendo que eles foram introduzidos após 5 vezes o número de itens (225).

Feito isso podemos constatar pela tabela (2) que conseguimos reduzir o número de iterações simplex,

Tabela 2: Comparação entre os tipos de cortes utilizados (Média de 10 exemplos)

Cortes	n. mochilas	n. de iterações	tempo	cauda
sem cortes	313,3	313,3	12,8	65,9
GG	246,4	248,1	2,6	0,3
GG e 1	240,1	250,7	2,6	0,6
GG e 2	229,7	274,1	2,1	0,3
GG e 3	236,0	269,7	2,6	0,3
GG, 1 e 2	228,5	268,7	2,1	0,5
GG, 1, 2 e 3	227,5	268,4	2,1	0,7
3	232,9	256,8	2,5	0,3

ou seja iterações sem o cálculo de mochilas, porém nos custou uma menor redução do número de mochilas. Em relação a cauda conseguimos a mesma redução em média e por fim a economia de tempo foi menor devido ao maior número de problemas da mochila resolvidos.

6 Agradecimento

Este trabalho teve apoio da FAPESP e CNPq.

7 Conclusões e perspectivas

Os próximos passos serão; a continuação dos estudos considerando vários objetos em estoque, o estudo de novos cortes duais, e novas formas de introduzi-los de tal forma que não tenhamos o aumento das iterações do método simplex (iterações que não calculam mochilas) em ambos os casos, somente um objeto(vários de mesmo tamanho) em estoque e vários objetos (tamanhos diferentes) em estoque.

Bibliografia

[1] ARENALES, M. N., MORABITO, R., O Problema de Corte e Empacotamento e Aplicações Industriais. Livro-texto de Mini curso, XX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Gramado - RS, (1997).

[2] BEN AMOR, H., DESRODIERS, J., VALÉRIO DE CARVALHO, J. M., Dual-optimal inequalities for stabilized column generation. Les Cahiers du GERAD, G-2003-20 (2003).

[3] BEN AMOR, H. and DESRODIERS , J. (2003) A Proximal Trust Region Algorithm for Column Generation Stabilization. Les Cahiers du GERAD G-2003-43 (2003). To appear in Comp. & OR.

[4] GILMORE, P. C., GOMORY, R. E., A linear programming approach to the cutting stock problem. Operations Research, 9: 848-859 (1961).

[5] GILMORE, P. C., GOMORY, R. E., A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. Operations Research, 11: 863-888 (1963).

[6] GILMORE, P. C., GOMORY, R. E., Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. Operations Research, 13: 94-120 (1965).

[7] HAESSLER, R. W., A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. Operations Research, 28: 1001-1005 (1980).

[8] HINXMAN, A., The trim-loss and assortment problems: a survey. European Journal of Operational Research, 5: 8-18 (1980).

[9] LUBBECKE M. E. Dual variable based fathoming in dynamic programs for column generation . European Journal of Operational Research, 162: 122-125 (2005).

[10] MARSTEN, R.E., The use of the boxstep method in discrete optimization. Mathematical Programming Study, 3, 127-144 (1975).

[11] MERLE, O. , VILLENUEVE, D., DESROSIERS, J., HANSEN, P., Stabilized column generation. Discrete Mathematics, 194, 229-237 (1999).

[12] POLDI, K. C., Algumas extensões do problema de corte de estoque. Tese de Mestrado, ICMC - USP, (2003).

[13] VALÉRIO DE CARVALHO, J. M., Using extra dual cuts to accelerate convergence in column generation. INFORMS Journal on Computing (2003).