Simulação Analítica Transiente da Dispersão de Poluente Na Atmosfera pela Técnica GILTT Dupla

Mariana Cassol, **Sérgio Wortmann**, **Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena**

Departamento de Matemática Pura e Aplicada,UFRGS
Avenida Bento Gonçalves, 9500
91509-900, Porto Alegre, RS, Brasil
E-mail: cassolma@terra.com.br, wortmann@mat.ufrgs.br, vilhena@mat.ufrgs.br

Introdução

Nos últimos anos muitos pesquisadores vêm trabalhando com objetivo de estimar a concentração de contaminantes na atmosfera, na tentativa de avaliar o impacto ambiental causado e posteriormente procurar formas de melhorar a qualidade de vida das pessoas.

Este tipo de problema tem sido amplamente abordado utilizando-se equacionamentos difusivos-advectivos conhecidos na literatura como modelo K_{ZZ}. [3][4][5]

Historicamente, estes modelamentos são resolvidos por técnicas numéricas ou híbridas analítico-numéricas [7][8]. Por outro lado, abordagens analíticas com controle de erro como GITT (General Integral Transform Technique) [2] e GILTT (General Integral Laplace Transform Technique) [10] também têm sido empregadas na sua solução com algumas vantagens.

Como é de conhecimento geral, técnicas analíticas apresentam baixo custo computacional, boa precisão nos resultados e, no caso da GITT e GILTT, controle de erro dos resultados. Esta característica torna este tipo de solução útil para os pesquisadores que se concentram no desenvolvimento de modelos. Em uma comparação da solução encontrada com dados experimentais, por exemplo, pode-se precisar o erro devido ao modelamento usado uma vez que o erro relativo ao método de solução é controlado.

Resumidamente, pode-se dizer que a GITT [2] é uma técnica de solução de equações diferenciais parciais (EDP) em que o potencial original é expandido em uma base determinada a partir de um problema de Sturm-Liouville escolhido por associação com o problema original. Uma vez efetuada esta expansão, é feita uma integração que intenta fazer uso da propriedade de ortogonalidade da base utilizada. O resultado é chamado de problema transformado, normalmente resolvido numericamente. Uma vez resolvido o problema transformado, a solução do problema original é determinada fazendo-se uso da chamada Fórmula da Inversa. A GILTT [11], técnica derivada da GITT, tem como principal diferença de sua antecessora o uso da transformada de Laplace e diagonalização de matrizes na solução do problema transformado que, no caso de problemas lineares, é obtida de forma totalmente analítica.

Uma das limitações do uso desta técnica esta nas condições de contorno do problema original. O método só é aplicável em problemas com condições de contorno homogêneas independentemente de serem de primeiro, segundo ou terceiro tipos. No caso de problemas com contornos não homogêneos, deve-se fazer uso de filtros[2].

Trabalhos como o de Wortmann [10] e Heinen [6] têm evidenciado o uso da GILTT em problemas de poluição na Camada Limite Planetária (CLP). Porém, até onde os autores tenham notícia, problemas de poluição na CLP resolvidos por esta técnica restringem a sua aplicação a uma variável. As demais variáveis ou a dependência da variável temporal são tratadas por outras técnicas. Não se tem conhecimento da aplicação da transformada GILTT Dupla na simulação de dispersão de poluentes na atmosfera.

Neste trabalho é apresentada a aplicação da técnica GILTT dupla para a solução de um problema bidimensional transiente de poluição na CLP que utiliza o chamado modelo K_{ZZ}. A equação difusivo-advectiva utilizada para representar o problema é resolvida na sua forma tradicional sem que nenhum termo tenha sido desprezado. Os coeficientes de difusão utilizados, bem como as componentes longitudinal e vertical da velocidade do ar são dependentes das variáveis espaciais. Uma das condições de contorno deste problema é não homogênea. Conforme dito acima, a aplicação da GILTT exige que ela seja filtrada. Para isso, é definida uma função filtro [2], obtida a partir da solução de um problema EDP auxiliar. Uma vez determinado este filtro, é construído o problema filtrado e apresentada a sua solução pela técnica GILTT dupla.

Equacionamento do problema

Este problema obedece ao equacionamento clássico. Para maiores detalhes ver [1] [3] [4] [5] [7] [8] [10] e [11]. Considere uma fonte aérea que libera poluição na camada limite planetária. Seja a dimensão vertical, representada por "z", variando desde a altura do solo até a CLP e "x" a dimensão coincidente com a dimensão da componente horizontal da direção do vento que varia desde a fonte aérea (chaminé) até o infinito. A variável "x" definida desta forma permite que o problema seja tratado de forma bidimensional por que elimina o termo advectivo da terceira dimensão e justifica desprezar o termo difusivo. Matematicamente, pode-se escrever a equação que representa o fenômeno considerado como sendo:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+w\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,z)\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,z)\frac{\partial C}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

$$0<x<\infty$$

$$0<z<zmáx$$

onde C(x,z,t) pertence ao R^2 + R e é a concentração de contaminantes, u(x,z) e w(x,z) são, respectivamente, as componentes horizontal e vertical do vento, e k(x,z) é o coeficiente de difusão.

As condições de contorno e iniciais consideradas são:

$$C(x,z,t)=\frac{Q\delta(x-hf)}{u} \quad \text{quando } x=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial C(x,z,t)}{\partial x}=0 \text{ quando } x\to\infty \qquad (3)$$

$$\frac{\partial C(x,z,t)}{\partial z}=0 \text{ quando } z=0=zmáx \qquad (4)$$

$$C(x,z,t)=0 \text{ quando } t=0 \qquad (5)$$

Para facilitar a escolha do Problema Auxiliar, como afirma Buske[1], pode-se reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+w\frac{\partial C}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,z)\right)\frac{\partial C}{\partial x}+k(x,z)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial}{\partial z}k(x,z)\right)\frac{\partial C}{\partial z}+k(x,z)\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \qquad (6)$$

Como mencionado anteriormente, a aplicação da técnica GILTT exige condições de contorno homogêneas. Tendo em vista que a condição de contorno (2) em "x" é não-homogênea, o problema será filtrado, como segue.

.

Solução do Filtro

Para determinar a solução filtro [9], é definida a função F(x,z) que deve obedecer a uma versão estacionária e a coeficientes constantes do operador da equação original (1) sujeita às mesmas condições de contorno.

Resolvendo, a função F(x,z) deve obedecer ao seguinte sistema de equações:

$$ut\frac{\partial F(x,z)}{\partial x}=kt\frac{\partial^2 F(x,z)}{\partial x^2}+kt\frac{\partial^2 F(x,z)}{\partial z^2} \qquad (7)$$

$$F(x,z)=\frac{Q\delta(x-hf)}{u} \quad \text{quando } x=0 \qquad (7a)$$

$$\frac{\partial F(x,z)}{\partial x}=0 \text{ quando } x\to\infty \qquad (7b)$$

$$\frac{\partial C(x,z)}{\partial z}=0 \text{ quando } z=0=zmáx \qquad (7c)$$

onde ut e kt são coeficientes constantes e valem o valor médio de u(x,z) e k(x,z). Além disso, para garantir as condições de contorno da equação auxiliar que aqui é chamada de filtrada, faz-se:

Cf(x,z,t) = C(x,z,t) - F(x,z) . (8)

Aplicando as condições de contorno (2), (3) e (4) em Cf(x,z,t) e considerando as condições de F(x,z) iguais as de C(x,z,t), obtém-se condições de contorno homogêneas para Cf(x,z,t):

Cf(x,z,t) = 0 quando x = 0, z = 0, z = zmáx e $x\to\infty$ (9)

Para a solução do sistema é aplicada a técnica da Transformada Integral Clássica, onde, segundo seu formalismo [9], primeiramente deve-se resolver o Problema de Sturm-Liouville (também chamado de Problema Auxiliar) com suas respectivas condições de contorno abaixo:

$$\Psi''_i(z)+\lambda^2_i\Psi_i(z)=0 \qquad (10a)$$

$$\Psi'_i(z)=0 \text{ quando } z=0=zmáx \qquad (10b)$$

onde ' e '' indica as derivadas de primeira e segunda ordem respectivamente.

Resolvendo o problema de Sturm-Liouville encontra-se:

$$\Psi_i(z)=1 \text{ e } \lambda_i=0 \text{ quando } i=0 \qquad (11a)$$

$$\Psi_i(z)=\cos(\lambda_i z) \text{ e } \lambda_i=\frac{i\pi}{zmáx} \text{ quando } i=1,2.. \qquad (11b)$$

Pela mesma técnica, o segundo passo é expandir F(x,z). Aplica-se a técnica em z, pois neste eixo as condições de contorno são homogêneas, o que permite seu uso. Assim, é definida a seguinte Fórmula da Inversa:

$$F(x,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_i(x)\Psi_i(z)}{\sqrt{N_i}} \qquad (12)$$

onde a norma N_i é dada por:

$$N_i=\int_0^{zmáx}\Psi^2{}_i(z)dz \qquad (13)$$

e os autovalores e autovetores do Problema de Sturm-Liouville satisfazem a seguinte condição de ortogonalidade:

$$\int_0^{zmáx}\frac{\Psi_i(z)\Psi_j(z)}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz=\begin{cases}0, \text{ se } i\neq j\\ 1, \text{ se } i=j\end{cases} \qquad (14)$$

Após a substituição da Fórmula da Inversa (12) na equação (7) e a aplicação do operador $\int_0^{zmáx}\frac{\Psi_j(z)}{\sqrt{N_j}}dz$ obtém-se:

$$utf_j'(x)=ktf_j''(x)-kt\lambda^2{}_jf_j(x)\ . \qquad (15)$$

Para as condições de contorno o procedimento é análogo e resulta:

$$f_i(x)=\frac{Q\cos(hf)}{u\sqrt{N_j}} \quad \text{quando } x=0 \qquad (15a)$$

$$f'_i(x)=0 \text{ quando } x\rightarrow\infty \qquad (15b)$$

Resolvendo o sistema (15) e considerando um N suficientemente grande que representaria a condição no infinito obtem-se:

$$f_j(x)=\frac{Q\cos(hf)}{u\sqrt{N_j}}e^{\frac{ut}{2k}x}\left(1-\frac{ut}{2kt+utN}\right),$$

$$\text{quando } \lambda^2{}_j=-\frac{ut^2}{4kt^2} \quad \text{ou}$$

$$f_j(x)=\frac{Q\cos(hf)}{u\sqrt{N_j}}[e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}x}+$$

$$+\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}N}.$$

$$1/(\frac{(ut-\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}e^{\frac{(ut-\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}}$$

$$-\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}N}).$$

$$\left(e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}x}-e^{\frac{(u-\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_j})}{2k}x}\right)],$$

$$\text{quando } \lambda^2{}_j>-\frac{ut^2}{4kt^2}\ . \qquad (16)$$

Assim, a solução do filtro F(x,z) é obtida substituindo os resultados de $f_j(x)$ em (12). Portanto:

$$F(x,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\frac{Q\cos(hf)}{u\sqrt{N_i}}e^{\frac{ut}{2k}x}\left(1-\frac{ut}{2kt+utN}\right)\Psi_i(z)}{\sqrt{N_i}},$$

$$\text{quando } \lambda^2{}_i=-\frac{ut^2}{4kt^2} \qquad \text{ou}$$

$$F(x,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Psi_i(z)}{\sqrt{N_i}}\frac{Q\cos(hf)}{u\sqrt{N_i}}[e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}x}+$$

$$+\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}N}.$$

$$1/(\frac{(ut-\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}e^{\frac{(ut-\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}}-$$

$$\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}N}).$$

$$\left(e^{\frac{(ut+\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}x}-e^{\frac{(u-\sqrt{ut^2+4kt^2\lambda^2{}_i})}{2k}x}\right)]\ ,$$

$$\text{quando } \lambda^2{}_i>-\frac{ut^2}{4kt^2}\ . \qquad (17)$$

Aplicação da GILTT dupla

Em um primeiro momento, reescreve-se a equação (1) utilizando a equação (8) de forma que:

$$\frac{\partial Cf}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial Cf}{\partial x}+u\frac{\partial F}{\partial x}+w\frac{\partial Cf}{\partial z}+w\frac{\partial F}{\partial z}=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,z)\right)\frac{\partial Cf}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial x}k(x,z)\right)\frac{\partial F}{\partial x}+k(x,z)\frac{\partial^2 Cf}{\partial x^2}$$

$$+k(x,z)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial}{\partial z}k(x,z)\right)\frac{\partial Cf}{\partial z}+\left(\frac{\partial}{\partial z}k(x,z)\right)\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$+k(x,z)\frac{\partial^2 Cf}{\partial z^2}+k(x,z)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \qquad (18)$$

onde Cf = Cf(x,z,t), F = F(x,z),u = u (x,z) e w = w(x,z).

É aplicada a técnica GILTT primeiramente em z, sendo que a aplicação é análoga à do filtro. Utiliza-se a seguinte Fórmula da Inversa:

$$Cf(x,z,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Cft_i(x,t)\Psi_i(z)}{\sqrt{N_i}} \quad (19)$$

Percebe-se que as condições de contorno em z de Cf(x,z,t) e de F(x,y) são as mesmas, logo tem-se o mesmo Problema de Sturm-Liouville (10a) e (10b) e conseqüentemente os mesmos autovalores e autovetores (11a-b).

Após utilização da técnica obtém-se:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial Cft_i}{\partial t}O_{ij}+\sum_{i=0}^{\infty}Cft_i\,(B_{ij}(x)-G_{ij}(x)+F_{ij}(x))$$
$$-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial^2 Cft_i}{\partial x^2}F_{ij}(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial Cft_i}{\partial x}(A_{ij}(x)-E_{ij}(x))=V_j \quad (20)$$

onde

$$O_{ij}=\int_0^{zmáx}\frac{\Psi_i\Psi_j}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz\,;\;A_{ij}(x)=\int_0^{zmáx}u\frac{\Psi_i\Psi_j}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz;$$

$$B_{ij}(x)=\int_0^{zmáx}w\frac{\Psi'_i\Psi_j}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz;$$

$$F_{ij}(x)=\int_0^{zmáx}k\frac{\Psi_i\Psi_j}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz;$$

$$E_{ij}(x)=\int_0^{zmáx}\left(\frac{\partial}{\partial x}k\right)\frac{\Psi_i\Psi_j}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz;$$

$$G_{ij}(x)=\int_0^{zmáx}\left(\frac{\partial}{\partial z}k\right)\frac{\Psi'_i\Psi_j}{\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}}dz;$$

$$V_j=-\int_0^{zmáx}u\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\Psi_j}{\sqrt{N_j}}dz-\int_0^{zmáx}w\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\Psi_j}{\sqrt{N_j}}dz$$
$$+\int_0^{zmáx}\left(\frac{\partial}{\partial x}k\right)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\Psi_j}{\sqrt{N_j}}dz+\int_0^{zmáx}k\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\Psi_j}{\sqrt{N_j}}dz$$
$$+\int_0^{zmáx}k\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\Psi_j}{\sqrt{N_j}}dz+\int_0^{zmáx}\left(\frac{\partial}{\partial z}k\right)\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\Psi_j}{\sqrt{N_j}}dz$$

e onde $\Psi_i=\Psi_i(z)$, $\Psi_j=\Psi_j(z)$ e $k=k(x,z)$. (21)

Para encontrar Cft_i, é aplicada a técnica GILTT em x de forma análoga. No entanto, neste caso, não se tem o mesmo problema de Sturm-Liouville, pois as condições de contorno não são as mesmas. Assim:

$$\phi''_m(x)+\beta^2{}_m\phi_m(x)=0 \quad (22)$$

$$\phi'_m(x)=0 \text{ quando } x\to\infty \quad (22a)$$

$$\phi_m(x)=0 \text{ quando } x=0 \quad (22b)$$

Resolvendo o problema de Sturm-Liouville obtém-se:

$$\phi_m(x)=\text{sen}(\beta_m x) \text{ e } \beta_m=(2m-1)\frac{\pi}{2M} \text{ para } m=1,2.. \quad (23)$$

onde M pode ser tão grande quanto se queira.

É utilizada a seguinte Fórmula da Inversa na aplicação da GILTT em x:

$$Cft_i(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Cftt_{im}(t)\phi_m(x)}{\sqrt{N_m}} \quad (24)$$

Após a aplicação da técnica e o uso da propriedade da ortogonalidade das autofunções, obtém-se:

$$T'+PT=V \quad (25)$$

onde P, T e V são:

$$P=\beta^2{}_m\int_0^{\infty}F_{ij}\frac{\phi_m(x)\phi_n(x)}{\sqrt{N_m}\sqrt{N_n}}dx$$
$$+\int_0^{\infty}(A_{ij}(x)-E_{ij}(x))\frac{\phi_m'(x)\phi_n(x)}{\sqrt{N_m}\sqrt{N_n}}dx$$
$$+\int_0^{\infty}(B_{ij}(x)-G_{ij}(x)+F_{ij}(x))\frac{\phi_m(x)\phi_n(x)}{\sqrt{N_m}\sqrt{N_n}}dx$$
$$V=\int_0^{\infty}V_j\frac{\phi_n(x)}{\sqrt{N_n}}dx$$
$$T=Cftt_{jn}(t) \quad (26)$$

Para resolver a equação (25) é aplicada a técnica de Transformada de Laplace e diagonalização de matrizes obtendo-se:

$$s\overline{T}(s)+P\overline{T}(s)=\frac{V}{s}+T(0) \text{ e}$$
$$(sI+P)\overline{T}(s)=\frac{V}{s}+T(0) \quad (27)$$

onde I é a matriz identidade.

Assume-se que a matriz P é não degenerada e que pode ser fatorada em seus autovalores e autovetores. Portanto P pode ser reescrita como $P=XDX^{-1}$ onde X é a matriz de autovalores de P. Então, substituindo P em (27), reorganizando e aplicando Transformada Inversa de Laplace tem-se:

$$T(t)=XR(t)\,X^{-1}\,V+X\,Ra(t)\,X^{-1}\,T(0) \quad (28)$$

onde $R(t) = -\frac{1}{\beta m}(e^{-t\beta m} - 1)$ e $Ra(t) = e^{-t\beta m}$.

Para calcular T(t) ainda deve-se encontrar T(0). Para isso, é utilizada a condição inicial (5) onde $C(x,z,t) = 0$ para encontrar Cf(x,z,0). Depois, são encontradas $Cft_j(x,0)$ e $Cftt_{jn}(0)$ respectivamente. Então:

$$T(0) = -\frac{1}{\sqrt{N_n}} \int_0^M f_j(x)\,\mathrm{sen}(\beta_n x)dx \qquad (29)$$

Assim, temos:

$$Cf(x,z,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{XT(t)X^{-1}V\phi_m(x)\Psi i(z)}{\sqrt{Nm}\sqrt{Ni}} \qquad (30)$$

E, portanto, a concentração C(x,z,t) = Cf(x,z,t) + F(x,z) onde Cf(x,z,t) e F(x,z) estão expressos em (30) e (17) respectivamente.

Conclusão

Neste trabalho foi encontrada uma solução analítica para um problema bidimensional e transiente de dispersão de poluentes atmosféricos, representado por uma equação difusivo-advectiva com coeficientes de difusão e advecção variáveis, e condições de contorno não-homogêneas.

Foi utilizado um filtro para tornar as condições de contorno homogêneas e permitir o uso da GILTT.

É importante ressaltar que, até onde os autores têm conhecimento, a técnica GILTT dupla foi aqui aplicada pela primeira vez.

A solução final é encontrada na forma de somatórios infinitos. Para obtenção dos resultados, estes somatórios deverão ser truncados. A escolha da ordem de truncamento destes somatórios permite controlar o erro da solução.

Este detalhe é de muita utilidade para avaliação do modelo matemático utilizado. Eventuais diferenças da solução obtida, quando comparada com resultados de referência, tanto podem ter origem na metodologia de solução, quanto no modelo utilizado. Uma vez que o erro da técnica de solução é passível de estimativa, a acuidade do modelo usado é verificada de imediato.

O próximo passo, que dará continuidade a este trabalho, será a implementação do código computacional com os dados aqui mostrados, para futura comparação com dados experimentais já existentes na bibliografia.

Referências

[1] D. Buske. Solução analítica da equação de difusão-advecção pelo método GILTT aplicada à dispersão de poluentes atmosféricos. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2004.

[2] R. Cotta, M. Mikhaylov, "Heat Conduction Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation", Wiley, Baffins lane, Whinchester, England, 1997.

[3] G. A. Degrazia, H. F. Campos Velho, J. C. Carvalho. Non-local exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties. *Control Atmospheric Physics*. (1997) 57-64.

[4] G. A. Degrazia, D. M. Moreira, M. T. Vilhena. Derivation of an eddy diffusivity depending on source distance for vertically inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer. *Journal of Applied Meteorology*. 40 (2001) 1233-1240.

[5] G. A. Degrazia. An analytical air pollution model: eddy diffusivities depending on the source distance. *Air Pollution Modeling and its Applications.* XIV (2001) 391-397.

[6] I. R. Heinen. Solução Analítica da Equação da Energia Estacionária e Bidimensional para Simulação de Escoamento Plenamente Desenvolvido em Placa Plana Paralela pelo Método da GILTT. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2005.

[7] A. Moura. Modelos multidimensionais analíticos de dispersão de contaminantes na atmosfera: coeficientes de difusão dependentes da distância da fonte. 1999.

[8] A. Moura. Solução analítica para dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável. 1995.

[9] M. N. Ozisik. "Heat conduction". John Wiley & Sons .New York, 1993.

[10] S. Wortmann, M. T. Vilhena, D. M. Moreira, D. Buske. A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL *Atmospheric Environment*, 39 (2005) 2171-2178.

[11] S. Wortmann. Formulação semi-analítica para a equação transformada resultante da aplicação da GITT em problemas difusivos-advectivos. Tese de Doutorado, UFRGS, 2003.