Sistemas Lineares Reversíveis e Equivariantes

Cláudio A. Buzzi, **Michele de O. Alves**[*]
Pós Graduação em Matemática, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: buzzi@ibilce.unesp.br, michele@pur.com.br.

1 Introdução

Os sistemas lineares formam a base da maioria dos estudos sobre sistemas dinâmicos não lineares. Em muitos casos, a dinâmica local na vizinhança de uma singularidade de um sistema não linear, no espaço de fase, é similiar à dinâmica do sistema linearizado. Outro aspecto, que mostra a importância do estudo de sistemas lineares, é o seguinte: A Teoria das Bifurcações, que estuda como a dinâmica dos sistemas mudam quando parâmetros são variados, em geral usa a teoria dos sistemas lineares como uma de suas técnicas principais.

O objetivo deste trabalho é classificar os sitemas lineares reversíveis e equivariantes, ou seja, classificar as possíveis estruturas dos subespaços $gl_\sigma(V)$ das funções σ-reversíveis, em 10 classes distintas, através da classificação de representações irredutíveis de um grupo compacto de Lie G.

Visando esse objetivo apresentaremos conceitos básicos de Álgebra, Teoria de Representações de Grupos e também alguns resultados importantes como, por exemplo, o Lema de Schur.

2 Desenvolvimento

Para classificarmos os sistemas lineares reversíveis e equivariantes, veremos algumas definições, proposições, lemas e teoremas que nos serão útil nesta classificação. Primeiramente classificaremos as representações irredutíveis de G em termos de seus tipos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ como representações de G e como elas se decompoem em representações irredutíveis quando restritas à H

Consideremos uma equação diferencial linear da forma

$$\frac{dx}{dt} = Lx, \tag{1}$$

onde $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear. Dizemos que o sistema (1) é *reversível* com relação a uma aplicação linear $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se

$$RL = -LR. \tag{2}$$

Em outras palavras, se $x(t)$ é uma solução do sistema (1), então $R(x(-t))$ também o é. Nesse caso dizemos que R é uma simetria reversível do sistema (1).

Dizemos que o sistema (1) é *equivariante* com relação a uma aplicação linear $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se

$$SL = LS. \tag{3}$$

Equivalentemente, se $x(t)$ é solução de (1) então $S(x(t))$ também é solução. Quando (1) é S-equivariante, dizemos que S é uma simetria de (1).

A composição de duas simetrias de (1) ainda é uma simetria de (1), no entanto a composição de duas simetrias reversíveis de (1) é uma simetria de (1). Portanto, o conjunto das simetrias e simetrias reversíveis de L é fechado sobre a composição e formam um grupo que denotaremos por G.

Definição 1 *Seja G uma variedade diferenciável com estrutura de grupo. Dizemos que G é um grupo de Lie se a aplicação $G \times G \longrightarrow G$ definida por $(a, b) \longmapsto ab^{-1}$ for diferenciável. Em particular a aplicação $G \longrightarrow G$ tal que $b \longmapsto b^{-1}$ é diferenciável.*

Durante todo este trabalho estaremos considerando um grupo de Lie o grupo gerado por uma simetria reversível e por uma simetria.

Definição 2 *Seja G um grupo de Lie. Uma representação ρ de um grupo G sobre um espaço vetorial V é um homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$, onde $GL(V)$ é o conjunto das $f : V \longrightarrow V$ lineares invertíveis.*

Como $GL(V) \approx GL(m; \mathbb{K})$ temos que o homomorfismo $\rho : G \to GL(m; \mathbb{K})$ é uma representação. Neste trabalho estaremos denotando o espaço das matrizes $n \times n$ inversíveis por $GL(n, \mathbb{R})$ e a representação do grupo G sobre V por (V, ρ).

Com objetivo de usar a teoria da representação de grupos, combinaremos as duas condições (2) e (3) em uma única condição dada por

$$L\rho(g) = \sigma(g)\rho(g)L, \tag{4}$$

onde ρ é a representação de G e $\sigma : G \to \{+1, -1\}$

*bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa FAPESP, processo nº 03/09874-1

é um homomorfismo de grupos entre os grupos G e $\{-1,+1\} \subset GL(1,\mathbb{R})$. O Homomorfismo σ identifica precisamente como o grupo G divide-se em simetrias e simetrias reversíveis, isto é, se $\sigma(g)=+1$, então g é uma simetria, e se $\sigma(g)=-1$, então g é uma simetria reversível. Temos que $H=\sigma^{-1}(\{+1\})$ é um subgrupo normal de G. Dizemos que L satisfazendo (4) é (G,σ)-reversível, ou simplesmente σ-reversível.

Denotaremos por $gl_\sigma(V,\rho)$, ou simplesmente $gl_\sigma(V)$, o espaço das funções σ-reversíveis de V em V.

Chamaremos de $l_G((V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2))$ o conjunto de todas funções, de V_1 em V_2, lineraes e equivariantes em relação as representações (V_1,ρ_1) e (V_2,ρ_2) de G. Quando as duas representações forem as mesmas, denotaremos $l_G((V,\rho),(V,\rho))$ por $gl_G(V)$. Neste caso as funções lineares podem ser compostas, dando a $gl_G(V)$ a estrutura de uma álgebra e não somente de um espaço vetorial real.

Definição 3 *Sejam (V,ρ) uma representação de G sobre V e W um subespaço de V. Dizemos que W é G-invariante se $\rho(g)W \subseteq W, \forall g \in G$.*

Definição 4 *Uma representação (V,ρ) de G é chamada de irredutível se V não contém nenhum subespaço linear G-invariante não trivial.*

Definição 5 *Dizemos que duas representações (V_1,ρ_1) e (V_2,ρ_2) de G, são isomorfas se existe uma função $f : V_1 \longrightarrow V_2$ linear, equivariante e inversível.*

O seguinte resultado descreve os espaços lineares das funções lineares entre representações irredutíveis que é o centro da teoria de representação.

Lema 1 (Lema de Schur) *1) Se (V_1,ρ_1) e (V_2,ρ_2) são duas representações irredutíveis, não isomorfas de G então,*

$$I_G(V_1,V_2)=\{0\}.$$

2) Se (V,ρ) é uma representação irredutível de G então $gl_G(V)$ é isomorfo (como uma álgebra real) à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Dizemos que uma representação irredutível (V,ρ) é do tipo $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ segundo a classe do isomorfismo de $gl_G(V)$.

Seja (U,τ) uma representação de G sobre U tal que $U=U_1\oplus\ldots\oplus U_m$ é a soma direta de subespaços de U não necessariamente única.

Definição 6 *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G em V. Dizemos que ρ é uma representação completamente redutível se V se decompõe como*

$$V=V_1\oplus ...\oplus V_k, \tag{5}$$

onde cada V_i é $G-$invariante e a restrição da ação de G sobre V_i, (V_i,ρ_i), é uma representação de G que é isomorfa à uma soma direta de m_i cópias de uma representação irredutível (U_i,τ_i), ou seja, $(V_i,\rho_i)\approx(U_i,\tau_i)\oplus\ldots\oplus(U_i,\tau_i)$.

Chamaremos (5) de Decomposição Isotípica de G, observe que esta é única.

Outra maneira de definir se uma representação ρ é uma representação completamente redutível é se

$$\rho\approx\rho_1\oplus ...\oplus\rho_k, \tag{6}$$

onde cada ρ_i é uma representação irredutível de G sobre V_i, com $i=1,\cdots,k$.

Em forma de matriz, ρ se escreve em blocos como

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_k \end{pmatrix}, \tag{7}$$

onde ρ_i é a representação de G sobre V_i dada pela matriz da transformação linear $\rho_i(g) : V \longrightarrow V$ na base de V_i.

Segue da parte 1) do Lema de Schur, que toda função linear $G-$invariante de V em V deve preservar os blocos isotípicos V_i. De fato, suponha que para qualquer função $G-$ invariante não nula, $f : V \longrightarrow V$, tivermos $f(V_i)\subset V_j$, com $i\neq j$. Logo, pela recíproca do Lema de Schur as representações ρ_i e ρ_j são isomorfas, tendo em vista que estas são irredutíveis por hipótese. Absurdo! pois como V é uma Decomposição Isotípica, segue que ρ_i e ρ_j não são isomorfas.

Sendo assim temos que $gl_G(V)$ decompõe-se como a soma direta dos subespaços que são isomorfos à $gl_G(V_i)$, isto é,

$$gl_G(V)\approx gl_G(V_1)\oplus\ldots\oplus gl_G(V_k). \tag{8}$$

Restringindo para funções $G-$equivariantes inversíveis obteremos uma decomposição correspondente,

$$GL_G(V)\approx GL_G(V_1)\times\ldots\times GL_G(V_k). \tag{9}$$

O espaço $gl_G(V)$ é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie $GL_G(V)$ e a ação adjunta de $GL(V)$ sobre $gl(V)$, restrita as transformações lineares equivariantes, é a ação adjunta de $GL_G(V)$ sobre $gl_G(V)$.

Esta ação decompõe-se como a soma direta de ações adjuntas dos grupos $GL_G(V_i)$ sobre os espaços $gl_G(V_i)$, ou seja,

$$\phi=\phi_1\oplus\ldots\oplus\phi_k, \tag{10}$$

onde ϕ_i, $i=1,\ldots,k$, é a ação de $GL_G(V_i)$ sobre $gl_G(V_i)$.

Assim como V_i é a soma direta de m_i cópias de U_i, alguma função linear equivariante $L : V_i \longrightarrow V_i$, terá sua matriz da forma,

$$[L]=\begin{pmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1m_i} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m_i1} & \ldots & L_{m_im_i} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

onde L_{rs} é a matriz da transformação linear $G-$equivariante $L_{rs} : U_i^s \longrightarrow U_i^r$ e $r, s = 1, \ldots, m_i$, são as posições de U_i na soma direta das m_i cópias de U_i.

Se (U_i, ρ_i) é do tipo $\mathbb{K}_{\rm i}$, então podemos tomar $L_{rs} = l_{rs}$, onde $l_{rs} \in \mathbb{K}_{\rm i}$. Usando o isomorfismo $l_{rs} \longmapsto l_{rs}I$, onde $l_{rs} \in \mathbb{K}_{\rm i}$ e I é a identidade sobre U_i, segue que $L_{rs} = l_{rs} \approx l_{rs}I$.

Portanto, a transformação linear $L : V_i \longrightarrow V_i$ é dada pela matriz $m_i \times m_i$, com elementos em $\mathbb{K}_{\rm i}$, logo $gl_G(V_i) \approx gl(m_i; \mathbb{K}_{\rm i})$.

Analogamente $GL_G(V_i) \approx GL(m_i; \mathbb{K}_{\rm i})$, e também a ação adjunta de $GL_G(V)$ sobre $gl_G(V)$ é isomorfa a soma direta de ações adjuntas dos grupos $GL(m_i; \mathbb{K}_{\rm i})$ sobre suas álgebras de Lie $gl(m_i; \mathbb{K}_{\rm i})$.

Finalmente, generalizamos a classificação de representações irredutíveis em tipos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ e assim podemos definir o tipo de uma representação geral V (definida sobre $\mathbb{R}$) para ser isomorfa a classe de $gl_G(V)$ como uma álgebra linear real.

Definição 7 *Seja $g \in G \backslash H$. Uma involução sobre grupo $GL_H(V)$ é dada por*

$$\begin{aligned} \Sigma : GL_H(V) &\longrightarrow GL_H(V) \\ \phi &\longmapsto \rho(g)^{-1} \phi \rho(g). \end{aligned}$$

Também denotaremos por Σ a involução sobre a álgebra $gl_H(V)$, dada por

$$\begin{aligned} \Sigma : gl_H(V) &\longrightarrow gl_H(V) \\ A &\longmapsto \rho(g)^{-1} A \rho(g). \end{aligned}$$

Um número de propriedades elementares desta involução são resumidas na seguinte proposição.

Proposição 1 *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial. Então,*

1) O grupo $GL_G(V)$ é o conjunto dos pontos fixos da ação Σ sobre $GL_H(V)$.

2) A restrição da ação adjunta de $GL_H(V)$ sobre $gl_H(V)$ para $GL_G(V)$ preserva os subespaços

$$\begin{aligned} gl_G(V) &= \{A \in gl_H(V); \Sigma(A) = A\}, \\ gl_\sigma(V) &= \{A \in gl_H(V); \Sigma(A) = -A\}. \end{aligned}$$

3) A ação induzida de $GL_G(V)$ sobre $gl_G(V)$ é a ação adjunta.

4) O subespaço $gl_\sigma(V)$ é um $gl_G(V)$-submódulo de $gl_H(V)$, ambos com respectiva estrutura de álgebra induzida pela composição e o produto dado pelo colchete de Lie, isto é, $[A, B] = AB - BA$.

5) Se existe uma função σ-reversível invertível $T : V \longrightarrow V$ então $gl_\sigma(V)$ é gerado por T como um $gl_G(V)$-submódulo de $gl_H(V)$ com a operação de composição.

Definição 8 *Seja (U, τ) uma representação do grupo G sobre U. Definimos a sua representação σ-dual, denotada por (U, τ_σ), como o homomorfismo $\tau_\sigma : G \longrightarrow GL(U)$ dado por $\tau_\sigma(g) = \sigma(g)\tau(g)$.*

Definição 9 *Seja (U, τ) uma representação de um grupo G sobre U. Dizemos (U, τ) é uma representação σ-auto dual se (U, τ_σ) é isomorfo a (U, τ).*

Definição 10 *Sejam U e V espaços vetoriais direito sobre $\mathbb{K}$ e α um automorfismo de $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $\mathbb{R}$-linear f de U em V é $\mathbb{K}^\alpha$-linear, ou $\mathbb{K}$-semilinear com o respectivo α, se*

$$f(xk) = f(x)\alpha(k), \forall x \in U, k \in \mathbb{K}$$

Denotaremos por $gl(V; \mathbb{K}^\alpha)$ o espaço das funções $\mathbb{K}^\alpha$-lineares de V em V.

Lema 2 *Seja (U, τ) uma representação de G, σ-auto dual, do tipo $\mathbb{K}$. Então,*

1) $S : U \longrightarrow U$ é $\mathbb{K}$-semilinear com respectivo automorfismo α.

2) $S^2 = kI$ para algum $k \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ com $\alpha(k) = k$.

Teorema 1 *Seja (U, τ) uma representação irredutível de G do tipo $\mathbb{K}$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

1) A representação (U, τ) é σ-auto dual.

2) $\exists$ uma função linear $T : U \longrightarrow U$ σ-reversível não nula.

3) $\exists$ uma função linear $T : U \longrightarrow U$ σ-reversível invertível satisfazendo um dos seguintes conjuntos de condições,

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T é $\mathbb{R}$-linear e $T^2 = I$.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T é $\mathbb{R}$-linear e $T^2 = -I$.

c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, T é $\mathbb{C}$-linear e $T^2 = I$.

d) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, T é $\bar{\mathbb{C}}$-linear e $T^2 = I$.

e) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, T é $\bar{\mathbb{C}}$-linear e $T^2 = -I$.

f) $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, T é $\mathbb{H}$-linear e $T^2 = I$.

g) $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, T é $\mathbb{H}$-linear e $T^2 = -I$.

E ainda, se (U, τ) é σ-auto dual e $T : U \longrightarrow U$ σ-reversível invertível então $gl_\sigma(U)$ é gerado como um módulo $gl_G(U)$ por T.

Corolário 1 *Seja (U, τ) uma representação irredutível de G do tipo $\mathbb{K}$. Então,*

1) A álgebra $gl_H(U)$ é isomorfa a uma das 10 álgebras listadas na coluna 3 da Tabela 1.

2) Sobre este isomorfismo, nos casos σ-auto dual, o subespaço $gl_\sigma(U)$ é gerado como um módulo sobre $gl_G(U)$ pela função T mostrada na coluna 4 da Tabela 1.

3) Sobre o isomorfismo do item 1), o automorfismo $\Sigma : gl_H(U) \longrightarrow gl_H(U)$ é isomorfo à aqueles listados na coluna 4 da Tabela 2.

Os resultados do Teorema 1 e Corolário 1 são resumidos nas seguintes tabelas.

	$gl_G(U)$	$gl_H(U)$	T
NSD-R	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	—
NSD-C	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	—
NSD-H	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}$	—
SD-RR	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	(1,-1)
SD-CC	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	(1,-1)
SD-HH	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	(1,-1)
SD-RC	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	i
SD-CR	$\mathbb{C}$	$gl(2;\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
SD-CH	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	j
SD-HC	$\mathbb{H}$	$gl(2;\mathbb{C})$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Tabela 1: Referente ao Teorema 1 e Corolário 1 - Classificação das Representações Irredutíveis de um Grupo de Lie Compacto G e suas restrições para um subgrupo H de índice 2.

	T^2	α	$\Sigma(L)$
NSD-R	—	—	L
NSD-C	—	—	L
NSD-H	—	—	L
SD-RR	I	$\mathbb{R}$	$\tau(L)$
SD-CC	I	$\mathbb{C}$	$\tau(L)$
SD-HH	I	$\mathbb{H}$	$\tau(L)$
SD-RC	-I	$\mathbb{R}$	$\overline{L}$
SD-CR	I	$\overline{\mathbb{C}}$	$-iLi$
SD-CH	-I	$\overline{\mathbb{C}}$	$L^\sharp$
SD-HC	-I	$\mathbb{H}$	$-j\overline{L}j$

Tabela 2: Referente ao Teorema 1 e Corolário 1 - Classificação das Representações Irredutíveis de um Grupo de Lie Compacto G e suas restrições para um subgrupo H de índice 2.

Proposição 2 *Uma representação (U,τ) de G é irredutível do tipo $\mathbb{K}$ se, e somente se, sua σ-dual (U,τ_σ) é irredutível do tipo $\mathbb{K}$.*

Considere uma permutação de ordem 2, denotada por σ, do conjunto $\{1,\cdots,k\}$, tal que a σ-dual de (U_i,τ_i) é $(U_{\sigma(i)},\tau_{\sigma(i)})$. Observe que estamos usando a notação $U_{\sigma(i)}$ somente para diferenciar as representações (U_i,τ_i) da sua σ-dual, ou seja, $U_{\sigma(i)} = U_i$, tendo em vista que uma representação e sua σ-dual representam um grupo em um mesmo subespaço vetorial.

Segue do Lema de Schur que toda função σ-reversível $L : V \longrightarrow V$ deve ser uma função de V_i para $V_{\sigma(i)}$ e, desde que $\sigma^2(i) = i$, vice-versa.

Portanto esta função deve deixar invariante os subespaços definidos por $\widehat{V_i} = V_i + V_{\sigma(i)}$.

Sendo assim, para $V = \widehat{V}_1 \oplus\cdots\oplus \widehat{V}_k$, temos que o subespaço $gl_\sigma(V)$ decompõe-se como

$$gl_\sigma(V) \approx gl_\sigma(\widehat{V}_1)\oplus\cdots\oplus gl_\sigma(\widehat{V}_k).$$

Proposição 3 *Sejam o grupo G e sua representação (U_i,τ_i) sobre U_i.*

1) Se (U_i,τ_i) é σ-auto dual então $V_i = V_{\sigma(i)}$ e também $\widehat{V}_i = V_i$.

2) Se (U_i,τ_i) não é σ-dual então V_i e $V_{\sigma(i)}$ são dois blocos isotípicos diferentes e $\widehat{V}_i = V_i \oplus V_{\sigma(i)}$.

O seguinte resultado, descrevendo a ação de G sobre cada bloco $\widehat{V}_i$, é uma consequência simples das definições.

Seja $(\mathbb{K}^{\mathrm{m}}, 1^{\mathrm{m}})$ denotando a representação trivial de G sobre $\mathbb{K}^{\mathrm{m}}$ e $(\mathbb{K}^{\mathrm{m}}, \sigma^{\mathrm{m}})$ a soma direta de m cópias da representação sinal σ sobre $\mathbb{K}$.

Lema 3 *Seja (V,ρ) uma representação de G e $V = \widehat{V_1}\oplus\cdots\widehat{V_l}$, onde $\widehat{V_i} = V_i \oplus V_{\sigma(i)}$.*

1) Se (U_i,τ_i) não é σ-auto dual e é do tipo $\mathbb{K}$ então $\widehat{V_i} \approx \mathbb{K}^{\mathrm{m+n}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{U_i}$, onde $m = m_i$ e $n = m_{\sigma(i)}$. A representação de G sobre $\widehat{V_i}$ é dada pelo homomorfismo $\widehat{\rho_i} = (1^m \oplus \sigma^n)\otimes_{\mathbb{K}} \tau_i$.

2) Se (U_i,τ_i) é σ-auto dual e é do tipo $\mathbb{K}$ então $\widehat{V_i} \approx \mathbb{K}^{\mathrm{m}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{U_i}$, onde $m = m_i$. A representação de G sobre $\widehat{V_i}$ é dada pelo homomorfismo $\widehat{\rho_i} = 1^m \otimes_{\mathbb{K}} \tau_i$.

Denominamos a decomposição $V = \widehat{V_1}\oplus\cdots\widehat{V_l}$ da representação (V,ρ) como sua *Decomposição σ-Isotípica.*

Teorema 2 *Seja (V,ρ) uma representação de G e $\sigma : G \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ um homomorfismo sobrejetivo com núcleo H. Se $V = \widehat{V_1}\oplus\cdots\widehat{V_l}$ denota a Decomposição σ-Isotípica de V, então,*

1) O espaço $gl_H(V)$, das funções H-equivariantes de V em V, decompõe-se como

$$gl_H(V) \approx gl_H(\widehat{V_1})\oplus\cdots\oplus gl_H(\widehat{V_l}).$$

Os automorfismos Σ da álgebra de Lie $gl_H(V)$ preserva esta decomposição e portanto preserva as restrições e as decomposições da subalgebra $gl_G(V)$ e $gl_G(V)$-submódulo $gl_\sigma(V)$

$$gl_G(V) \approx gl_G(\widehat{V_1})\oplus\cdots\oplus gl_G(\widehat{V_l}),$$
$$gl_\sigma(V) \approx gl_\sigma(\widehat{V_1})\oplus\cdots\oplus gl_\sigma(\widehat{V_l}).$$

2) A álgebra $gl_H(\widehat{V_i})$ é isomorfa à álgebra $\mathcal{A}$, na coluna 2 da Tabela 3, determinada pelo tipo da correspondente representação (U_i,τ_i). A restrição de Σ para $gl_H(\widehat{V_i})$ é isomorfa a involução sobre $\mathcal{A}$ mostrada na coluna 3 da Tabela 3. Os ±1 subespaços $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ desta involução são indicados na coluna 2 e 3 da Tabela 4. Estes são isomorfismos de $gl_G(\widehat{V_i})$ e $gl_\sigma(\widehat{V_i})$, respectivamente.

3) Se (U_i,τ_i) não é σ-auto dual, é do tipo $\mathbb{K}$ e também $\widehat{V_i} \approx \mathbb{K}^{m+n}\otimes_{\mathbb{K}} U_i$, com $m = m_i$ e $n = m_{\sigma(i)}$, então o isomorfismo entre as álgebras $\mathcal{A}= gl(m+n;\mathbb{K})$ e $gl_H(\widehat{V_i})$ é dado por

$$gl(m+n;\mathbb{K}) \longrightarrow gl_H(\widehat{V_i})$$
$$A \longmapsto A\otimes_{\mathbb{K}} I.$$

4) Seja (U_i,τ_i) σ-auto dual e do tipo $\mathbb{K}$, e também $\widehat{V_i} \approx \mathbb{K}^m \otimes_{\mathbb{K}} U_i$, com $m = m_i$. Seja $T : U_i \longrightarrow U_i$ a função σ-reversível dada na coluna 4, da Tabela 1. Então o isomorfismo entre as álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$ e $gl_H(\widehat{V_i})$ é dado explicitamente por $A = (A_1, A_2) \longmapsto (A_1 \otimes_{\mathbb{K}} I) + (A_2 \otimes_{\mathbb{K}} T)$. Note que A_1 é sempre $\mathbb{K}$-linear enquanto que A_2 é $\mathbb{K}^\alpha$-linear se, e somente se, T é $\mathbb{K}^\alpha$-linear, assim os produtos tensoriais estão bem definidos.

5) A ação de $GL_G(\widehat{V_i})$ sobre $gl_\sigma(\widehat{V_i})$ é isomorfo à natural ação de $GL(m;\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ sobre $l^n_m(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{l}^m_n(\mathbb{K})$, nos casos NSD ou de $GL(m;\mathbb{K})$ sobre $gl(m;\mathbb{K}^\alpha)$, nos casos SD.

O teorema 2 é resumido nas tabelas abaixo.

	$\mathcal{A} \approx gl_H(\widehat{V_i})$	$\Sigma(A)$
NSD-R	$gl(m+n;\mathbb{R})$	$R^{-1}_{m,n} A R_{m,n}$
NSD-C	$gl(m+n;\mathbb{C})$	$R^{-1}_{m,n} A R_{m,n}$
NSD-H	$gl(m+n;\mathbb{H})$	$R^{-1}_{m,n} A R_{m,n}$
SD-RR	$gl(m;\mathbb{R}) \oplus \mathrm{gl}(m;\mathbb{R})$	$(A_1, -A_2)$
SD-CC	$gl(m;\mathbb{C}) \oplus gl(m;\mathbb{C})$	$(A_1, -A_2)$
SD-HH	$gl(m;\mathbb{H}) \oplus gl(m;\mathbb{H})$	$(A_1, -A_2)$
SD-RC	$gl(m;\mathbb{C})$	$\overline{A}$
SD-CR	$gl(2m;\mathbb{R})$	$-iAi$
SD-CH	$gl(m;\mathbb{H})$	$A^\sharp$
SD-HC	$gl(2m;\mathbb{C})$	$-j\overline{A}j$

Tabela 3: Referente ao Teorema 2 - A estrutura das Álgebras $gl_H(\widehat{V_i})$ para um bloco σ-isotípico correspondente à uma representação (U_i,τ_i) de G.

	$\mathcal{A}_+ \approx gl_G(\widehat{V_i})$	$\mathcal{A}_- \approx gl_\sigma(\widehat{V_i})$
NSD-R	$gl(m;\mathbb{R}) \oplus \mathrm{gl}(m;\mathbb{R})$	$l^n_m(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{l}^m_n(\mathbb{R})$
NSD-C	$gl(m;\mathbb{C}) \oplus gl(m;\mathbb{C})$	$l^n_m(\mathbb{C}) \oplus l^m_n(\mathbb{C})$
NSD-H	$gl(m;\mathbb{H}) \oplus gl(m;\mathbb{H})$	$l^n_m(\mathbb{H}) \oplus l^m_n(\mathbb{H})$
SD-RR	$gl(m;\mathbb{R})$	$gl(m;\mathbb{R})$
SD-CC	$gl(m;\mathbb{C})$	$gl(m;\mathbb{C})$
SD-HH	$gl(m;\mathbb{H})$	$gl(m;\mathbb{H})$
SD-RC	$gl(m;\mathbb{R})$	$gl(m;\mathbb{R})$
SD-CR	$gl(m;\mathbb{C})$	$gl(m;\overline{\mathbb{C}})$
SD-CH	$gl(m;\mathbb{C})$	$gl(m;\overline{\mathbb{C}})$
SD-HC	$gl(m;\mathbb{H})$	$gl(m;\mathbb{H})$

Tabela 4: Referente ao Teorema 2 - As subalgebras $gl_G(\widehat{V_i})$, e $gl_G(\widehat{V_i})$-submodulos $gl_\sigma(\widehat{V_i})$ de $gl_H(\widehat{V_i})$, para um bloco σ-isotípico correspodente à uma representação (U_i,τ_i) de G.

Denotaremos por $l^n_m(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.

3 Resultados

Finalmente poderemos classificar os sistemas lineares reversíveis e equivariantes em 10 classes distintas, através da Teoria de Representações.

Se a representação de G sobre U, (U,τ), for uma representação irredutível, temos pelo Corolário 1 que $gl_\sigma(U)$ é gerado pela função T, mostrada na coluna 4 da Tabela 1.

Vejamos agora para uma representação qualquer, não necessariamente irredutível.

Primeiramente, como vimos no Seção 2, se

$$V = \widehat{V}_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{V}_k,$$

então $gl_\sigma(V) \approx gl_\sigma(\widehat{V}_1) \oplus \cdots \oplus gl_\sigma(\widehat{V}_k)$.

Logo é suficiente, para descrever $gl_\sigma(V)$, o caso onde V consiste de um único espaço σ-isotípico, pois se descrevermos $gl_\sigma(\widehat{V}_i)$, com $i = 1, \cdots, k$, bastar tomarmos $\oplus_{i=1}^k gl_\sigma(\widehat{V}_i)$ para descrevermos $gl_\sigma(V)$.

O seguinte teorema classificará os sistemas lineares reversíveis e equivariantes para dada uma representação qualquer de G, e este segue diretamente do Teorema 2.

Teorema 3 *Seja $V,\rho)$ uma representação de um grupo G. Considere (U,τ) uma representação irredutível de G, obtida pela Decomposição Isotípica de V e (W,π) a representação obtida pela soma direta das cópias de (U,τ). Tome $V = \widehat{V_\rho} = W \oplus W_\sigma$.*

1) Se (U,τ) não é σ-auto dual e é do tipo $\mathbb{K}$ então existe uma base para V tal que uma função $L : V \longrightarrow V$ é σ-reversível se, e somente se, L age como uma matriz da forma

$$L = \begin{bmatrix} & & & a_{11}I & \cdots & a_{1n}I \\ & 0 & & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & a_{m1}I & \cdots & a_{mn}I \\ b_{11}I & \cdots & b_{1m}I & & & \\ \vdots & \cdots & \vdots & & 0 & \\ b_{n1}I & \cdots & b_{nm}I & & & \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$, m e n são as multiplicidades das representações irredutíveis (U,τ) e (U,τ_σ) em V, e I é uma matriz identidade com a mesma dimensão de W.

2) Se (U,τ) é σ-auto dual e é do tipo $\mathbb{K}$ então existe uma base para V tal que uma função $L : V \longrightarrow V$ é σ-reversível se, e somente se, L age como uma matriz da forma

$$L = \begin{bmatrix} a_{11}T & \cdots & a_{1m}T \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}T & \cdots & a_{mm}T \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, m é a multiplicidade de (U,τ) sobre V, e T é a matriz de uma função σ-reversível fixada de U em U como descrita na Tabela 1.

Portanto pelo Teorema 3, concluímos que para qualquer representação de G podemos classificar os sistemas lineares reversíveis e equivariantes como

$$gl_\sigma(V) \approx \begin{cases} l^m_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{l}^n_m(\mathbb{K}) & se \quad (W,\rho) \not\approx (W,\rho_\sigma) \\ gl(m;\mathbb{K}) & se \quad (W,\rho) \approx (W,\rho_\sigma) \end{cases}.$$

Referências

[1] Adams, J. F., "Lectures on Lie Groups", Benjamim, New York, 1969.

[2] Bröcker, T. e Dieck, T., "Representations of Compact Lie Groups", Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1985.

[3] Golubitsky, M. e Schaeffer, D. G., "Singularities and Groups in Bifurcation Theory", Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] Gonçalves, A., "Tópicos em Representação de Grupos", 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Poços de Caldas, 1973.

[5] Lamb, J. S. W. e Roberts, M., Reversible Equivariant Linear Systems, Journal of Diff. Equations, 159, 239-279, 1999.

[6] San Martin, L. A. B., "Álgebras de Lie", Unicamp, Campinas, 1999.

[7] Serre, J. P., Linear Representations of Finite Groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] Warner, F. W., "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups", Springer-Verlag, New York, 1983.