Alguns resultados para a equação do calor e equações de advecção-difusão

Paulo R. de Ávila Zingano, **Milene A. Guadagnin**,

Program de Pós-Graduação em matemática Aplicada, PPGMAP, UFRGS,

91509-900, Porto Alegre, RS

E-mail: pzingano@terra.com.br, guadagnin@mat.ufrgs.br,

Neste trabalho, inicialmente são obtidas diversas propriedades assintóticas importantes para soluções $u(\cdot,t)$ da equação linear do calor da forma

$$u_t = div(A\nabla u), \quad \mathbf{x} \in R^n,\ t > 0 \tag{1}$$

onde $A \in R^{n\times n}$ é uma matriz constante simétrica e positiva definida, correspondentes a estados iniciais p-somáveis, i.e.,

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_0 \in L^p(R^n), \tag{2}$$

onde $1 \leq p < \infty$. A equação (1) é suficientemente simples de modo a permitir uma representação explícita para a solução, dada por

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

onde λ é a média geométrica dos autovalores da matriz A, i.e.,

$$\lambda = (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{3}$$

onde $Spec\ A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Para estados iniciais $u(\cdot,0) \in L^p(R^n)$, a condição inicial (2) deve ser entendida da forma

$$u(\cdot,t) \to u_0 \quad em \quad L^p(R^n) \quad ao \quad t \to 0^+, \tag{4}$$

isto é,

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p(R^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to 0^+, \tag{5}$$

onde $\|\cdot\|_{L^pR^n}$ denota a norma do espaço $L^p(R^n)$, i.e.,

$$\|w\|_{L^p(R^n)} = \left(\int_{R^n} |w(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}},\ w \in L^p(R^n). \tag{6}$$

Verificamos que, para $u_0 \in L^p(R^n)$, $u(\cdot,t)$ dada acima satisfaz (5), tendo-se ademais $u(\cdot,t) \in C^0([0,+\infty[, L^p(R^n))$, ou seja, $u(\cdot,t) \in L^p(R^n)$ para cada $t \geq 0$ e, para cada $t_* \geq 0$,

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,t_*)\|_{L^p(R^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to t_*. \tag{7}$$

Ademais, mostramos que existe apenas uma solução (clássica) para o problema (1), (2) no espaço $C^0([0,+\infty[, L^p(R^n))$. Esta e outras propriedades básicas das soluções de (1), (2) são discutidas. Por exemplo, verificamos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(R^n)}$ decresce monotonicamente em t, i.e.,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(R^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(R^n)} \quad \forall\ t > 0. \tag{8}$$

Além disto, tem-se a propriedade da monotonicidade,

$$u(\cdot,0) \leq v(\cdot,0) \Rightarrow u(\cdot,t) \leq v(\cdot,t) \quad \forall\ t > 0 \tag{9}$$

onde

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

e

$$v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\lambda t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{-\frac{1}{4t}\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, A^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle} v_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

denotam as soluções de (1), correspondentes a estados iniciais $u(\cdot,0), v(\cdot,0) \in L^p(R^n)$ dados.

Sendo $u(\cdot,0) \in L^1(R^n)$, a massa de $u(\cdot,t)$, isto é, a quantidade m dada por

$$m = \int_{R^n} u(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} \tag{10}$$

é invariante no tempo, ou seja,

$$\int_{R^n} u(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} = \int_{R^n} u(\mathbf{x},0) d\mathbf{x} \quad \forall\ t > 0, \tag{11}$$

e ela desempenha papel importante na descrição do comportamento de $u(\cdot,t)$ ao $t \to +\infty$. Para isso, estabelecemos várias taxas de decaimento (ao $t \to +\infty$) de $u(\cdot,t)$, como e.g.

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(R^n)} \leq C\|u(\cdot,0)\|_{L^p(R^n)}\ t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)},$$

para todo $t > 0$, $p \leq r \leq \infty$, onde $C = C(r,p,\lambda,n)$ é uma constante que depende apenas de r, p, λ, n, onde λ é dado em (3) acima. Analogamente, $D^\ell u(\cdot,t)$ decai em $L^r(R^n)$ para cada $\ell \geq 1$, tendo-se

$$\|D^\ell u(\cdot,t)\|_{L^r(R^n)} \leq C_\ell \|u(\cdot,0)\|_{L^p(R^n)} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)-\frac{\ell}{2}},$$

para todo $t > 0$, $p \leq r \leq \infty$, onde $C_\ell = C(\ell, r, p, \lambda, n)$ denota uma constante que depende de ℓ, r, p, λ, n.

Além disso, detalhamos certos resultados de [2], computando os limites

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(R^n)}, \tag{12}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, onde $u(\cdot, t)$ é solução de (1), (2). No caso $p = 1$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(R^n)} \to |m|$$

onde m é a massa de $u(\cdot, t)$, dadas em (10), (11) acima. Ainda neste caso, para $r = \infty$ resulta

$$t^{\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(R^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}$$

onde λ é dado em (3), enquanto, para $1 < r < \infty$, tem-se

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(R^n)} \to \frac{|m|}{(4\pi\lambda)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{4\pi\lambda}{r}\right)^{\frac{n}{2r}}.$$

Em seguida, estendemos os resultados anteriores a equações de advecção-difusão mais gerais, da forma

$$u_t + div\ \mathbf{f}(u) = div(A(u)\nabla u), \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{13}$$

e para todo $t > 0$, considerando estados iniciais limitados e p-somáveis,

$$u(\cdot, 0) \in L^p(R^n) \cap L^\infty(R^n), \tag{14}$$

onde $1 \leq p \leq 2$. Na equação (13), $div\ \mathbf{f}(u)$ é o divergente da função fluxo $\mathbf{f}(u)$ com respeito à variável espacial $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, i.e., $div\ \mathbf{f}(u) = \partial x_1 f_1(u(\mathbf{x},t)) + \ldots + \partial x_n f_n(u(\mathbf{x},t))$, ∇u é o gradiente espacial de $u(\mathbf{x}, t)$, e $A(u)$ denota uma matriz positiva definida de ordem n descrevendo a dissipação de viscosidade no sistema, com

$$\langle \boldsymbol{\xi}, A(\mathsf{u})\boldsymbol{\xi}\rangle \geq \mu|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \forall\ \boldsymbol{\xi} \in R^n \tag{15}$$

para alguma constante $\mu > 0$ e todo u envolvido, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno em R^n, i.e.,

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \tag{16}$$

se $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, com $\xi_i, \eta_i \in R$ para todo i; escrevemos também $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}$ para $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle$. As funções A, $\mathbf{f}$ são dadas, suaves.

Seguindo [1], [3], [4] e [5] descrevemos as taxas de decaimento de $u(\cdot, t)$ e suas derivadas. Os resultados no caso de $1 - D$, isto é, para $u(\cdot, t)$ dada pela equação

$$u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x, \quad x \in R,\ t > 0 \tag{17}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad u_0 \in L^p(R) \cap L^\infty(R), \tag{18}$$

são derivados em detalhe, a partir de desigualdades de energia. Utilizamos estas estimativas, em seguida, para mostrar que, no caso $p = 1$, as soluções de (17), (18) são bem aproximadas ao $t \to +\infty$ pelas soluções $v(\cdot, t)$ da equação

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = a(0)v_{xx} \tag{19}$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \tag{20}$$

dita Equação de Burgers, tendo-se

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^r(R)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{21}$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Este resultado fornece várias propriedades importantes das soluções de (17), (18), que são discutidas. No caso $1 < p \leq 2$, os resultados são mais fáceis de serem descritos: tem-se simplesmente

$$t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(R)} \to 0 \quad ao\ t \to +\infty \tag{22}$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r.

Finalmente, mostremos que, para $n \geq 2$ dimensões, as soluções de (13), (14), são bem aproximadas, no caso $p = 1$, pelas soluções $v(\cdot, t)$ da equação linear do calor

$$v_t + \mathbf{f}'(0)\nabla v = div(A(0)\nabla v) \tag{23}$$

$$v(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, 0), \tag{24}$$

tendo-se neste caso

$$t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})}\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^r(R^n)} \to 0 \tag{25}$$

ao $t \to +\infty$, para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Este resultado é utilizado para a obtenção de propriedades interessantes do problema (13), (14). Quando $1 < p \leq 2$, obtemos novamente o resultado

$$t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{L^r(R^n)} \to 0 \tag{26}$$

ao $t \to +\infty$, para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r. Várias outras propriedades de interesse são também discutidas.

Referências

[1] T. Hagstrom, J. Lorenz e P.R. Zingano, On advection-diffusion equations I, *submitted*, (2003).

[2] T. Hagstrom, J. Lorenz e P.R. Zingano, On advection-diffusion equations II, *work in progress*, (2005).

[3] P.R. Zingano, "Nonlinear L^2 stability under large disturbances",J. Comm. Appl. Math, 103, pp. 207-219, 1999.

[4] P.R. Zingano, "Some new asymptotic results for burgers equation",submitted, 2004.

[5] P.R. Zingano, "Asymptotic behavior of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations",Comm.Pure Appl. Anal., 2004.