

Modelos Unidimensionais de Águas Rasas

Milton S. Braitt,

Departamento de Matemática, UFSC
88040-900, Florianópolis, SC
E-mail: msbraitt@mtm.ufsc.br

No estudo e desenvolvimento de métodos numéricos aplicados a previsão numérica de tempo, modelos simplificados são muito úteis, dada a complexidade de análises, testes e implementação de modelos realísticos. Neste sentido aparecem na literatura de meteorologia alguns modelos unidimensionais de águas rasas com rotação e orografia que são utilizados para estudo teórico e testes numéricos de discretizações e suas variantes. Neste trabalho vamos mostrar dois desses modelos unidimensionais e propor uma variação que aumenta o nível de complexidade mantendo ainda as vantagens de trabalhar em apenas uma dimensão espacial. A característica principal desta nova versão é fornecer condições adequadas para poder observar os efeitos dos termos não lineares na solução numérica.

1 O modelo de águas rasas

Vamos inicialmente mostrar um pouco da origem do modelo bidimensional de águas rasas e como chegamos a partir dele a um modelo unidimensional que ainda inclua o efeito geofísico de rotação e do forçante orográfico, ou seja, o relevo montanhoso.

Vejamos abaixo o conhecido ([5]) modelo de águas rasas em duas dimensões:

$$u_t + uu_x + vv_y - fv + \phi_x + \phi_x^S = 0, \quad (1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu + \phi_y + \phi_y^S = 0, \quad (2)$$

$$\phi_t + (\phi u)_x + (\phi v)_y = 0, \quad (3)$$

onde (u, v) é o vetor velocidade horizontal, $f = 2\Omega \sin \theta$ é a força de Coriolis (θ é a latitude e Ω é a velocidade de rotação da terra), ϕ é o geopotencial da superfície livre subtraído do geopotencial da superfície da terra, ϕ^S .

As duas primeiras equações acima, (1) e (2), são resultantes de simplificações feitas a partir da lei de conservação de momento,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + 2\Omega \times \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\vec{k} = F, \quad (4)$$

onde $\vec{u} = (u, v, w)^T$ é o vetor velocidade, $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ são as componentes horizontais e $w = w(\mathbf{x}, t)$ a componente vertical, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é a coordenada espacial, $\Omega = 7,292 \times 10^{-5}$ rad s^{-1} é a velocidade angular da Terra, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é

a densidade do ar, g é a aceleração da gravidade, \vec{k} é o vetor unitário na direção vertical, F representa as forças viscosas causadas pela fricção interna e $p = p(\mathbf{x}, t)$ é a pressão do ar.

A terceira equação, (3), é a equação de continuidade obtida a partir da lei de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (5)$$

As simplificações feitas foram que a pressão na vertical é a pressão hidrostática e que a componente da velocidade vertical w é desprezível. Em modelos de média escala essas simplificações já são razoáveis e mais ainda em um modelo de larga escala onde a razão entre as dimensões horizontais e a vertical é mais acentuada.

Vamos supor soluções u, v, ϕ do sistema (1-3), que dependam sómente de uma variável horizontal, por exemplo de x , e do tempo t . Portanto procuremos soluções do tipo $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ e $\phi = \phi(x, t)$.

Assim o sistema (1-3) fica reduzido a:

$$u_t + uu_x - fv + \phi_x + \phi_x^S = 0, \quad (6)$$

$$v_t + uv_x + fu + \phi_y^S = 0, \quad (7)$$

$$\phi_t + (\phi u)_x = 0. \quad (8)$$

Observe que apesar de mantermos a componente da velocidade v na direção de y , estamos supondo que ela dependa espacialmente sómente da variável x . Veja que o geopotencial da superfície do fundo, dado por ϕ^S , é permitido variar na direção y . Este é o protótipo do modelo unidimensional (1D) das versões que mostraremos nas Seções 2.2 e 3. Sómente no primeiro modelo (Seção 2.1) a função ϕ dependerá também da variável y de maneira especial.

Outra simplificação que será feita é em relação ao termo f associado à força de Coriolis. Neste trabalho veremos sómente modelos em que f é constante, o que significaria fisicamente que estamos calculando soluções próximas a uma determinada latitude. Neste caso, com f constante, temos o chamado plano f . Vale mencionar que existem modelos 1D que consideram f variável da forma $f = f_0 + \beta y$, chamado de plano β . Pretendemos considerar este caso em um próximo trabalho.

Com essas simplificações iniciais (outras serão feitas ainda) estamos nos afastando da física do modelo original, mas observe que uma das características comuns a esses modelos 1D é a existência dos dois principais tipos de ondas observados na atmosfera, as de gravidade e as meteorológicas, com velocidades próximas das ondas reais.

2 Modelos lineares 1D

Vejamos alguns modelos que apareceram em artigos de meteorologia derivados do sistema (1-3), e do (6-8).

2.1 Kurihara

Em [2] o autor considera ϕ_S constante, ou seja, o fundo plano e lineariza o sistema (1-3) em torno da solução

$$(u_0, v_0, \phi_0) = (U, 0, gH(y)) \quad (9)$$

onde U é uma constante representando a componente de velocidade na direção x e $H(y)$ é tal que

$$-\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y} = U. \quad (10)$$

Substitui a solução (u, v, ϕ) pelas suas correspondentes perturbações em torno do estado (9):

$$u = U + u' \quad (11)$$

$$v = v' \quad (12)$$

$$\phi = gH(y) + \phi'. \quad (13)$$

Considera então que as perturbações u' , v' e ϕ' dependam somente de uma dimensão espacial, x , e substitui (11-13) em (1-3) obtendo o seguinte sistema (omitindo os ' das perturbações):

$$u_t + Uu_x = fv - \phi_x, \quad (14)$$

$$v_t + Uv_x = -fu, \quad (15)$$

$$\phi_t + U\phi_x = fUv - gHu_x, \quad (16)$$

onde $H = H(y_0)$ é a altura da superfície livre para um valor fixo de y . Com este procedimento o autor obtém um sistema linear unidimensional, linearizado em torno de uma solução com velocidade constante U não nula. Observe que a forma artificial imposta sobre a função ϕ foi necessária para satisfazer a equação (2). Isto corresponde ao chamado balanço geostrófico que um estado básico deve satisfazer.

Em seguida apresenta soluções do sistema acima, (14-16), na forma:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i(x - c_i t), \quad (17)$$

$$v = \sum_{i=1}^3 v_i(x - c_i t), \quad (18)$$

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i(x - c_i t), \quad (19)$$

onde

$$u_i = \phi_i \frac{\nu^2(U - c_i)}{f^2 - (U - c_i)\nu^2} \quad (20)$$

$$v_i = \phi_i \frac{i\nu f}{f^2 - (U - c_i)\nu^2} \quad (21)$$

$$\phi_i = S_i \exp(i\nu(x - c_i t)), \quad (22)$$

onde $\nu = 2\pi/L$ é o comprimento de onda, c_i ($i = 1, 2, 3$) são as três velocidades de fase e S_i são as amplitudes das três ondas. Mostra então que

$$c_1 \cong U \quad (23)$$

$$c_2 \cong U + \sqrt{gH} \quad (24)$$

$$c_3 \cong U - \sqrt{gH} \quad (25)$$

obtendo assim os três principais tipos de ondas esperados: uma meteorológica e duas de gravidade.

A seguir analisa as características de vários métodos de discretização da seguinte equação simbólica derivada do sistema (14-16):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F_1 + F_2, \quad (26)$$

onde

$$F_1 = -Uh_x \quad (27)$$

$$F_2 = \text{lado direito de (14-16)}. \quad (28)$$

Por fim utiliza o modelo unidimensional (14-16) para realizar testes numéricos. Aplica esquemas de diferenças de discretização temporal para (26) comparando com a solução (17-19).

2.2 Outro modelo linear

Apresentamos agora um modelo linear utilizado por vários autores ([3], [4], [6] e [1]). Neste caso a função que descreve a orografia possui uma declividade na direção de y (Fig. 1), da seguinte forma:

$$\phi^S(x, y, t) = -gfUy + \phi^S(x). \quad (29)$$

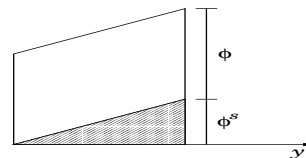


Figura 1: perfil de ϕ^S no sentido de $-y$

Com isso obtém-se o balanço geostrófico da equação (7). Assim o sistema (6-8) linearizado se reduz a:

$$u_t + Uu_x - fv + \phi_x + \phi_x^S = 0, \quad (30)$$

$$v_t + Uv_x + fu = 0, \quad (31)$$

$$\phi_t + U\phi_x + \phi_0 u_x = 0. \quad (32)$$

onde ϕ_0 é um valor referencial fixo para ϕ e as funções u, v e ϕ representam agora as perturbações em torno do estado $(U, 0, \phi_0)$. Na Figura 2 podemos ver um perfil deste estado na direção y . Observe que este sistema, (30–32), é algo mais simples que o da Seção 2.1 anterior.

Em [6] os autores usam este sistema para mostrar a possibilidade de existência de ressonâncias embora não aconteçam no caso da atmosfera. Verificam que podem efetivamente ocorrer ressonâncias puramente numéricas quando aplicado o método semi-Lagrangeano combinado com o semi-implícito. Propõem então resolver este problema através de descentralizações de alguns termos discretizados. Embora tenham utilizado o modelo 1D para a análise teórica, para testes numéricos usam o modelo bidimensional de águas rasas na esfera. Em [1] os autores prosseguem o tema acima estudando uma família de discretizações e analisando-as quanto a precisão.

No artigo [4] os autores usam os mesmos sistema (30–32) e argumentos que em [6] e fazem alguns testes numéricos com este modelo 1D para quantificar a intensidade das ressonâncias. Em [3] os autores analisam a aplicação da descentralização mencionada acima apenas na equação de continuidade, incluindo na análise a interpolação, que é usada na aplicação do método semi-Lagrangeano.

3 Versão não linear

Propomos uma nova variação do modelo de águas rasas em uma dimensão que é não linear, inclui um forçante da orografia e satisfaz o balanço geostrófico na equação (7). Conseguimos obter todas estas características em um modelo ainda tão simplificado fazendo uma extensão do perfil do fundo (29) utilizado na seção anterior (2.2), da seguinte forma:

$$\phi^S(x, y) = -fU_e(x)y + \phi^S(x) \quad (33)$$

onde $U_e(x)$ é uma função especial que descreveremos mais adiante.

Com esta nova forma da orografia o sistema (1–3) fica:

$$u_t + uu_x + vu_y - fv + \phi_x - fU'_e y + \phi_x^S = 0, \quad (34)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu - fU_e = 0, \quad (35)$$

$$\phi_t + (\phi u)_x + (\phi v)_y = 0, \quad (36)$$

Vamos desprezar o termo $-fU'_e y$ da equação (34) afim de simplificar o sistema acima. Podemos considerar, por exemplo, que estamos analisando a resposta do sistema em uma região muito próxima do eixo $y = 0$. Supondo agora soluções (u, v, ϕ) que dependam somente das variáveis x e t chegamos ao seguinte sistema que é o modelo desejado:

$$u_t + uu_x - f_0 v + \phi_x + \phi_x^S = 0, \quad (37)$$

$$v_t + uv_x + f_0(u - U_e) = 0, \quad (38)$$

$$\phi_t + (\phi u)_x = 0. \quad (39)$$

Vamos procurar uma função $U_e(x)$ de forma que o sistema acima tenha uma solução estacionária. Para isso escolhemos esta função como uma solução do seguinte sistema:

$$uu_x + \phi_x + \phi_x^S = 0, \quad (40)$$

$$(\phi u)_x = 0. \quad (41)$$

com as condições de fronteira

$$u(0) = u(L) = U, \quad (42)$$

$$\phi(0) = \phi(L) = gH_0, \quad (43)$$

para $x \in [0, L]$, onde L é o comprimento do domínio, U e H_0 são a velocidade e a profundidade respectivamente no ponto $x = 0$ e $x = L$ da fronteira. Considere que ϕ^S é não nula apenas em uma região central do intervalo $[0, L]$.

Vamos agora procurar uma solução do sistema (40–43),

$$(U_e(x), \phi_e(x)). \quad (44)$$

em forma fechada. Integrando as equações (40) e (41) e impondo as condições (42) e (43), obtemos

$$u^2/2 + \phi + \phi^S = U^2/2 + gH_0, \quad (45)$$

$$\phi u = gH_0 U. \quad (46)$$

Substituindo u da equação (46) na equação (45) obtemos a seguinte equação algébrica do terceiro grau para cada valor de x :

$$\phi^3(x) - (E - \phi^S(x))\phi^2(x) + F^2/2 = 0, \quad (47)$$

onde

$$E = U^2/2 + gH_0, \quad F = gH_0 U, \quad (48)$$

são constantes para cada U e H_0 fixos; será útil definir a seguinte constante:

$$B = F^2/2. \quad (49)$$

Para $E - \phi^S(x) \geq 3/2F^{2/3}$ a equação (47) possui duas soluções físicas, isto é, com geopotencial positivo; considerando que $gH_0 > U^2$, ou seja, a velocidade do fluido é subcrítica, temos uma única solução de (47). Esta solução pode ser dada explicitamente pela seguinte expressão¹:

$$\phi_e(x) = \frac{a(x)}{3} + \frac{2^{1/3} a(x)^2}{3 d(x)^{1/3}} + \frac{d(x)^{1/3}}{3(2^{1/3})}, \quad (50)$$

$$U_e(x) = F/\phi_e(x). \quad (51)$$

onde

$$a(x) = E - \phi^S(x), \quad (52)$$

$$d(x) = 2a(x)^3 - 27B + 3\sqrt{3}\sqrt{-4Ba(x)^3 + 27B^2}. \quad (53)$$

¹Obs: as raízes cúbicas na expressão são as raízes complexas de menor argumento.

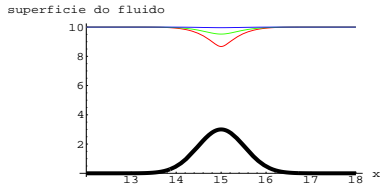


Figura 2: perfil da superfície livre, $\phi + \phi^S$, para alguns valores de U no caso de uma montanha isolada.

A Figura 2 ilustra algumas dessas soluções para valores diferentes da constante U . Podemos ver que quanto maior a velocidade maior a depressão sobre a montanha. Observe que com esta escolha da função $U_e(x)$,

$$(u, v, \phi) = (U_e(x), 0, \phi_e(x)), \quad (54)$$

é uma solução estacionária do sistema (37–39). Caso a orografia seja plana na direção de x recairemos no caso visto na seção anterior 2.2, ou seja, no sistema (30–32).

4 Conclusões

Assim obtivemos um sistema 1D não linear com características importantes sob o ponto de vista da realização de experimentos numéricos:

- Possui uma solução estacionária com a componente da velocidade diferente de zero na presença do forçante orográfico;
- podemos determinar esta solução em forma fechada e estamos livres para especificar qual a forma do perfil orográfico do fundo;
- se especificarmos uma função do perfil orográfico não nula em uma região interna do domínio, como uma montanha isolada, teremos uma solução periódica.

Com as características descritas acima poderemos evitar os erros numéricos mais comuns que aparecem em modelos com propagação de ondas e que seriam acumulados com aqueles que estaríamos interessados em analisar: teremos dados iniciais precisos para dar início nas rotinas computacionais e soluções periódicas que evitariam os erros derivados do tratamento da fronteira. A periodicidade das soluções também permitirá o uso de métodos espectrais que utilizam a transformada de Fourier.

Portanto entendemos que a versão proposta neste trabalho poderá contribuir para o estudo comparativo de esquemas numéricos e suas variantes em especial quando aplicados a modelos de previsão de tempo.

Agradecimentos: À UFSC, colegas, professores e funcionários do Dep. de Matemática. Ao IMPA onde parte dos resultados deste trabalho foram obtidos quando o autor estava fazendo o doutorado.

Referências

- [1] J. Côté, S. Gravel, Staniforth A., A generalized family of schemes that eliminate the spurious resonant response of semi-Lagrangian schemes to orographic forcing, *Monthly Weather Review*, 123 (1995), 3605-3613.
- [2] Y. Kurihara, On the use of implicit and iterative methods for the time integration of the wave equation, *Monthly Weather Review*, vol 3, n° 1 (1965) 33-46.
- [3] Li, Yong, Bates J. R., A study of behavior of semi-Lagrangian models in the presence of orography, *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 122 (1996), 1675-1700.
- [4] Lindberg L., Alexeev W. A., A study of the spurious orographic resonance in semi-implicit semi-Lagrangian models, *Mon. Wea. Rev.*, 128 (1999), 1982-1989.
- [5] Pedlosky J., Geophysical fluid dynamics, Springer-Verlag, New York, 1987, 710pp.
- [6] Rivest C., Staniforth A., and Robert A., Spurious resonant response of semi-Lagrangian discretization to orographic forcing: Diagnosis and solution, *Mon. Wea. Rev.*, 122 (1994), 366-376.