

Análise de Pontos Singulares de Curvas de Interseção de Superfícies.

Osmar Aléssio

UNINCOR- Universidade Vale do Rio Verde de Três Corações

Av. Castelo Branco, 82

CEP: 37.410-000, Três Corações, MG

E-mail: osmaralessio@yahoo.com.br

1 Introdução

Na determinação da interseção de duas superfícies por métodos numéricos é comum a ocorrência de pontos singulares. A análise do comportamento destes pontos pode ser importante na determinação da direção de caminhada em pontos de bifurcações ou cuspidais. O uso da teoria de singularidades permite classificar tais pontos e analisar o comportamento da curva em torno destes. Tal classificação é em geral complexa, envolvendo a compreensão de conceitos elaborados. Apresenta-se neste artigo um algoritmo para a classificação de singularidades conhecidas como do tipo A_k , $k \leq 5$, de curvas planas algébricas, baseado somente nos coeficientes polinomiais da forma diagonalizada da curva dada na forma implícita. Para as singularidades do tipo A_k , $k > 5$, D_k e E_k , deve-se usar o software SINGULAR para fazer a classificação de pontos singulares.

O problema de classificação de singularidades de curvas planas dadas na forma implícita, $f(x, y) = 0$, pode ser assim descrito:

Dado um ponto singular $P = (x_0, y_0)$ (i.e., $f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$), procuramos determinar se existe um difeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^2, P) \rightarrow (\mathbb{R}^2, P)$ tal que f possa ser reduzida a uma forma normal $f \circ \phi$ que descreva o comportamento da curva na vizinhança de P . Se o determinante da matriz hessiana $H(f(P))$ de f em P for não nulo, tem-se uma singularidade não degenerada (do tipo Morse). Se $H(f(P))$ tem co-posto 1, teremos as singularidades de tipo A_k (de codimensão k) que possuem forma normal $x^2 - y^{k+1} = 0$. Para $k = 2, 3, 4$, e 5 teremos singularidades que são conhecidas como cúspide simples, tacnóide, cúspide de Ramphoid e oscnóide, respectivamente. Se a hessiana for nula, a singularidade é de ordem ≥ 3 . Neste artigo, trata-se somente do tipo de singularidade A_k .

A classificação de singularidades é também analisada em termos da codimensão de sub-espacos construídos a partir do ideal jacobiano [5]. Procedimentos derivados desta análise envolvem, no entanto, a compreensão de muitos conceitos. Em [8],

encontra-se um algoritmo simples de ser implementado computacionalmente, conforme mostra a Figura 1. Nesta tabela, a notação $f_{\vec{v}\vec{v}\vec{v}} = d^3 f(\vec{v}, \vec{v}, \vec{v})$ corresponde à derivada na direção do autovetor \vec{v} associado ao autovalor $\lambda = 0$ da matriz hessiana $d^2 f$ quando $\det(d^2 f) = 0$ e $q = f_{\vec{v}\vec{v}\vec{v}} f_{xx} - 3f_{\vec{v}\vec{v}x}^2$. Observe que a classificação vai até A_3 .

$f_{xx} \neq 0$	$f_y = 0$	$\det d^2 f = 0$	$d^3 f(v, v, v) = 0$	$q = 0$	$\text{codim} \geq 4$
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
$\pm x^2 \pm y$	$\pm x^2 \pm y^2$	$\pm x^2 \pm y^3$	$\pm x^2 \pm y^4$		
$f_{xxx} \neq 0$	$f_y = 0$	$f_{xy} = 0$	$f_{yy} = 0$		$\text{codim} \geq 4$
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$		
$\pm x^3 \pm y$	$\pm x^3 \pm xy$	$\pm x^3 \pm y^2$			
$f_{xxxx} \neq 0$	$f_y = 0$	$f_{xy} = 0$			$\text{codim} \geq 4$
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$			
$\pm x^4 \pm y$	$\pm x^4 \pm xy$				
$f_{xxxxx} \neq 0$	$f_y = 0$				$\text{codim} \geq 4$
$= 0$	$\neq 0$				
$\pm x^5 \pm y$					
$\text{codim} \geq 4$					

Figura 1: Reconhecimento de singularidades de codimensão ≤ 3 .

Na seção 2, mostra-se os difeomorfismos locais que propomos para computar sistematicamente a forma normal $x^2 \pm y^{k+1}$ de uma função f . Com isso, foi possível derivar as condições para as singularidades do tipo A_k , $k = 2, 3, 4, 5$, em termos dos coeficientes da forma diagonalizada de f . Na seção 3, apresenta-se uma breve noção sobre interseção de superfícies. Na seção 4, aplica-se os resultados no problema de interseção. Finalmente, algumas considerações são ponderadas na seção 6.

2 Um novo algoritmo de classificação

Dado um ponto $P = f(x_0, y_0)$, condições necessárias, em termos dos coeficientes de f , para

que P seja um ponto singular do tipo A_k com $2 \leq k \leq 5$ são apresentadas nesta seção. Para isso, desenvolve-se uma sistemática de construção do difeomorfismo local de f em P .

No procedimento, considera-se que f esteja com forma quadrática diagonalizada, isto é, $f(x, y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + \dots$. Para uma curva dada na forma implícita $f(x, y) = 0$, com f suave, isto requer adicionalmente duas etapas: (1) a determinação do polinômio de Taylor até a ordem desejada e (2) a diagonalização da sua matriz hessiana.

Fazendo $f = h_0$, aplica-se sobre a função h_{j-2} o difeomorfismo ϕ_j , com $j = 2, 3, 4, \dots, k$,

$$\phi_j(x(z, w), y(z, w)) = \left(z - \frac{1}{2b_0} \sum_{i=0}^j a_i z^{j-i} w^i, w \right),$$

onde a_i são os $j+1$ primeiros coeficientes dos termos de grau $j+1$ de $h_{j-2}(x, y)$, para obter h_{j-1} . E, assim sucessivamente, até chegar na forma normal. Isto é, $h_1 = h_0 \circ \phi_2$, $h_2 = h_1 \circ \phi_3$, $h_3 = h_2 \circ \phi_4, \dots$, $h_k = h_{k-1} \circ \phi_{k+1}$.

Como a matriz Jacobiana de ϕ_k é

$$J_{\phi_k} = \begin{bmatrix} 1 + g_1(x, y) & g_2(x, y) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde g_1 e g_2 são funções polinomiais de grau $k-1$, conclui-se que elas se anulam na origem. Portanto, a matriz J_{ϕ_k} não é singular e, de acordo com o Teorema da Função Inversa, ϕ_k é um difeomorfismo local.

2.1 Singularidade tipo A_2

Em [5], usou-se o difeomorfismo ϕ_2 para encontrar as condições para a forma normal $x^2 \pm y^3$. Ao aplicar

$$\phi_2(z, w) = \left(z - \frac{1}{2b_0} [b_3z^2 - b_4zw - b_5w^2], w \right)$$

em

$$h_0(x, y) = f(x, y) = b_0x^2 + b_3x^3 + b_4x^2y + b_5xy^2 + b_6y^3 + b_7x^4 + b_8x^3y + b_9x^2y^2 + b_{10}xy^3 + b_{11}y^4 + \dots,$$

obtem-se

$$\begin{aligned} h_1(z, w) &= h_0(z, w) \circ \phi_2 \\ &= \mathbf{b_0z^2} + \mathbf{b_6w^3} + (b_7 - \frac{5b_3^2}{4b_0})z^4 + (b_8 - \frac{2b_3b_4}{b_0})z^3w + \\ &\quad (b_9 - \frac{3b_4^2}{4b_0} - \frac{3b_3b_5}{2b_0})z^2w^2 + (b_{10} - \frac{b_4b_5}{b_0})zw^3 + \\ &\quad (\frac{4b_0b_{11} - b_5^2}{4b_0})w^4 + \dots \end{aligned}$$

Como a hessiana tem co-posto igual a 1 ($b_0 \neq 0$), a condição necessária para termos uma forma normal $x^2 \pm y^3$, e portanto, uma singularidade do tipo A_2 (cúspide simples), é que o termo b_6 seja diferente de zero. Caso contrário, tem-se uma singularidade A_k com $k \geq 3$, cujas condições são derivadas nas próximas subseções.

2.2 Singularidade tipo A_3

Para derivar as condições necessárias de uma singularidade do tipo A_3 , deve-se aplicar o difeomorfismo $\phi_3(x, y) = (x - \frac{1}{2b_0} [(b_7 - \frac{5b_3^2}{4b_0})x^3 + (b_8 - \frac{2b_3b_4}{b_0})x^2y + (b_9 - \frac{3b_4^2}{4b_0} - \frac{3b_3b_5}{2b_0})xy^2 + (b_{10} - \frac{b_4b_5}{b_0})y^3], y)$

em

$$h_1(z, w) = b_0z^2 + (b_7 - \frac{5b_3^2}{4b_0})z^4 + (b_8 - \frac{2b_3b_4}{b_0})z^3w + (b_9 - \frac{3b_4^2}{4b_0} - \frac{3b_3b_5}{2b_0})z^2w^2 + (b_{10} - \frac{b_4b_5}{b_0})zw^3 + (\frac{4b_0b_{11} - b_5^2}{4b_0})w^4 + \dots$$

e obter

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= h_1 \circ \phi_2 = \mathbf{b_0x^2} + (\frac{4b_0b_{11} - b_5^2}{4b_0})\mathbf{y^4} + \\ &\quad (b_{12} + \frac{3b_3^3}{4b_0^2} - \frac{2b_3b_7}{b_0})x^5 + (b_{13} + \frac{7b_3^2b_4}{4b_0^2} - \frac{2b_4b_7}{b_0} - \frac{3b_3b_8}{2b_0})x^4y + \\ &\quad (b_{14} + \frac{5b_3b_4^2}{4b_0^2} + \frac{3b_3^2b_5}{2b_0^2} - \frac{2b_5b_7}{b_0} - \frac{3b_4b_8}{2b_0} - \frac{b_3b_9}{b_0})x^3y^2 + \\ &\quad (b_{15} - \frac{b_{10}b_3}{2b_0} + \frac{b_4^3}{4b_0^2} + \frac{2b_3b_4b_5}{b_0^2} - \frac{3b_5b_8}{2b_0} - \frac{b_4b_9}{b_0})x^2y^3 + \\ &\quad (b_{16} - \frac{b_{10}b_4}{2b_0} + \frac{b_4^2b_5}{2b_0^2} + \frac{3b_3b_5^2}{4b_0^2} - \frac{b_5b_9}{b_0})xy^4 + \\ &\quad (\frac{4b_0^2b_{17} - 2b_0b_5b_{10} + b_4b_5^2}{4b_0^2})\mathbf{y^5} + \dots \end{aligned}$$

Portanto, se $4b_0b_{11} - b_5^2 \neq 0$, tem-se a singularidade do tipo A_3 (tacnóide); do contrário, tem-se A_k , $k \geq 4$.

2.3 Singularidades tipo A_4 e A_5

Com a utilização da função `Expand[]` do software **Mathematica** obtivemos as novas condições para as singularidades do tipo A_4 (cúspide de Ramphoid) e A_5 (oscnóide) seguindo o mesmo procedimento descrito nas seções anteriores.

Para obter as condições necessárias de uma singularidade do tipo A_4 aplicou-se o difeomorfismo $\phi_4(z, w)$ em $h_2(x, y)$ obtendo $h_3(z, w) = (h_2 \circ \phi_4)(x, y)$. Com isso, chegamos à condição adicional, além de $b_0 \neq 0$ e $b_6 = 4b_0b_{11} - b_5^2 = 0$: $4b_0^2b_{17} - 2b_0b_5b_{10} + b_4b_5^2 \neq 0$.

Da mesma forma, obtém-se as condições necessárias para ter a singularidade do tipo A_5 , aplicando-se o difeomorfismo $\phi_5(x, y)$ em $h_4(z, w)$: $b_0 \neq 0$, $b_6 = 4b_0b_{11} - b_5^2 = 4b_0^2b_{17} - 2b_0b_5b_{10} + b_4b_5^2 = 0$ e $8b_0^3b_{24} - 2b_0^2b_{10}^2 - 4b_0^2b_5b_{16} + 4b_0b_4b_5b_{10} - 2b_4^2b_5^2 - b_3b_5^3 + 2b_0b_5^2b_9 \neq 0$.

2.4 Algoritmo

Sintetizando, dada uma função $f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 +$

$\dots = 0$, pode-se classificar a singularidade do ponto $P = f(0, 0)$, verificando apenas os coeficientes b_i da sua forma diagonalizada ($h(z, w) = b_0z^2 + b_3z^3 + b_4z^2w + b_5zw^2 + b_6w^3 + b_7z^4 + b_8z^3w + b_9z^2w^2 + b_{10}zw^3 + b_{11}w^4 + b_{12}z^5 + b_{13}z^4w + b_{14}z^3w^2 + b_{15}z^2w^3 + b_{16}zw^4 + b_{17}w^5 + \dots + b_{24}w^6 + \dots = 0$), se ela tiver co-posto igual a 1:

Algoritmo 1 Classificação $A_k \leq 5$.

Se $\det(H_f) \neq 0$ então A_1 ;

senão

se $(H_f \neq 0)$ então obtenha a forma diagonalizada $h(z, w)$

se $(b_6 \neq 0)$ então A_2

caso contrário

se $(4b_0b_{11} - b_5^2 \neq 0)$ então A_3

caso contrário

se $(4b_0^2b_{17} - 2b_0b_5b_{10} + b_4b_5^2 \neq 0)$ então A_4

caso contrário

se $(8b_0^3b_{24} - 2b_0^2b_{10}^2 - 4b_0^2b_5b_{16} + 4b_0b_4b_5b_{10} - 2b_4^2b_5^2 - b_3b_5^3 + 2b_0b_5^2b_9 \neq 0)$ então A_5

caso contrário A_k com $k \geq 6$

caso contrário ordem ≥ 3 .

3 Interseção de Superfícies

Nas últimas décadas, o problema do cálculo de interseção de superfícies tem sido extensivamente pesquisado por vários especialistas da área de Modelagem Geométrica. A interseção de superfícies pode ser dos tipos:

1. Paramétrica \times Paramétrica

Se as duas superfícies forem definidas por parametrizações $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ e $G(p, q) = (g_1(p, q), g_2(p, q), g_3(p, q))$, então os pontos da curva interseção são definidos pelas soluções do sistema (em geral não-linear) com 3 equações e 4 variáveis:

$$\begin{cases} f_1(u, v) - g_1(p, q) = 0 \\ f_2(u, v) - g_2(p, q) = 0 \\ f_3(u, v) - g_3(p, q) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

submetidas às restrições: $u_{min} \leq u \leq u_{max}, v_{min} \leq v \leq v_{max}, p_{min} \leq p \leq p_{max}, q_{min} \leq q \leq q_{max}$.

2. Implícita \times Implícita

Se as duas superfícies forem implícitas $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$, então os pontos da interseção são definidos pelas soluções do sistema (em geral não-linear) com 2 equações e 3 variáveis:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

3. Paramétrica \times Implícita

Se uma superfície for paramétrica $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ e a outra implícita

$g(x, y, z) = 0$, então os pontos da interseção são definidos pelas soluções do sistema (em geral não-linear) com 1 equação e 2 variáveis:

$$r(u, v) = g(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) = 0 \quad (3)$$

submetidas às restrições: $u_{min} \leq u \leq u_{max}, v_{min} \leq v \leq v_{max}$.

Cada um dos sistemas (1), (2) e (3) pode não ter solução, ter uma única solução ou uma infinidade de soluções, dependendo das superfícies não se intersectarem, serem tangentes em um único ponto ou se intersectarem segundo uma curva ou segundo um trecho de superfície. Neste trabalho, o interesse está na interseção quando ela é uma curva.

3.1 Singularidades

É desejável que seja possível traçar maximamente uma curva de interseção a partir de um ponto inicial, isto é, se for uma curva aberta, significa caminhar de um ponto inicial até atingir o bordo do domínio paramétrico (quando estamos olhando a curva no domínio paramétrico), se for curva fechada, significa caminhar de um ponto inicial até o retornar a este ponto novamente. Nos capítulos anteriores, apresentou-se a técnica de caminhada que estima a partir dos pontos traçados, o próximo ponto, considerando que haja continuidade do vetor tangente. Esta suposição não se aplica, entretanto, para alguns pontos singulares, como ilustra a Figura ?? . Uma solução para o caso particular da cúspide simples é inverter a direção do vetor tangente e a do vetor normal. Há porém, casos como o de cúspide de “Ramploid”, em que não se sabe qual é o procedimento que se deve tomar (Figura ?? .a).

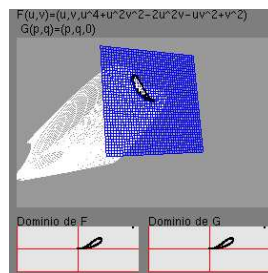


Figura 2: (a) Cúspide “Ramploid”

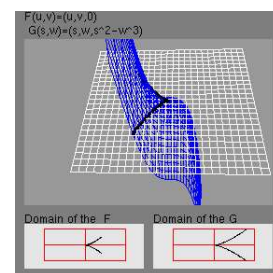


Figura 3: (b) Cúspide Simples

Existem ainda situações em que mesmo tendo continuidade no vetor tangente, deve-se verificar se o ponto é um tacnóide (os ramos não se cruzam) ou oscnóide (os ramos se cruzam), para obter um traçado topologicamente correto (Figura 4). Se isto não for feito e a curva for como a da Figura 4, pode-se traçar somente o círculo de fora ou o círculo de

dentro, levando a obter uma curva topologicamente incorreta.

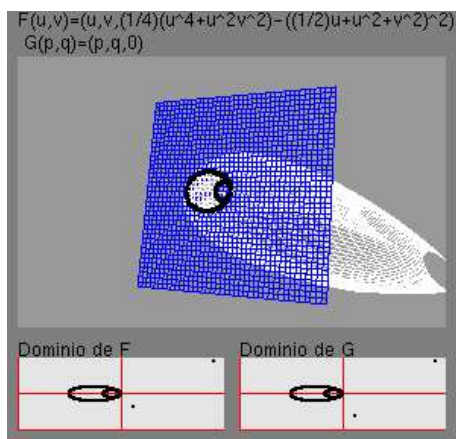


Figura 4: Oscnóide.

Aparentemente, há uma grande diversidade na forma como uma curva se auto-intersecciona num ponto. Felizmente, resultados decorrentes das pesquisas na área de teoria de singularidades, indicam que somente um número finito de comportamentos podem ocorrer para uma específica ordem de contato.

O objetivo é reconhecer as singularidades produzidas pela interseção de duas superfícies regulares, dadas pelas formas paramétricas $F(u, v)$ e $G(p, q)$, para prever o traço da interseção e garantir uma caminhada topologicamente correta.

As singularidades correspondem a pontos onde o vetor tangente não está definido, isto é, quando os vetores normais de ambas as superfícies são paralelos. Assim, os pontos singulares na curva interseção são as soluções de

$$\begin{cases} F(u, v) = G(s, w) \\ (F_u(u, v) \times F_v(u, v)) \times (G_s(s, w) \times G_w(s, w)) = \vec{0}. \end{cases}$$

A curva de interseção pode se auto intersecionar nestes pontos com uma certa ordem de contato (ordem da singularidade).

Para utilizar as ferramentas providas pela teoria de singularidades no reconhecimento de singularidades foi necessário desenvolver:

1. um procedimento para determinar os pontos singulares e
2. uma técnica para representar a vizinhança deste ponto singular através de uma curva algébrica plana.

3.2 Determinação da curva algébrica aproximada

Nesta seção, mostra-se que é possível aproximar, no ponto singular, a interseção de duas superfícies regulares por uma curva algébrica. O interessante é

que com isso se pode utilizar os recursos de classificação de curva algébrica plana, para obter o comportamento do ponto singular.

Dadas duas superfícies regulares S_1 e S_2 , pode-se expandí-las usando a fórmula de Taylor

$$F(u, v) = F(u_0, v_0) + dF(u_0, v_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(u_0, v_0) + R_n(x_0),$$

onde $d^n F(u_0, v_0) = (u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v})^n F(u, v)$ e $\frac{R_n(u_0, v_0)}{\|(u, v) - (u_0, v_0)\|^n} \rightarrow 0$ com $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$.

Por exemplo, a interseção das duas superfícies paramétricas regulares ($F(u, v) = G(p, q)$), pode ser aproximada implicitamente pela igualdade de seus polinômios de Taylor de ordem n ,

$$dF(u, v) + \frac{1}{2} d^2 F(u, v) + \frac{1}{3!} d^3 F(u, v) + \frac{1}{4!} d^4 F(u, v) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(u, v) = dG(p, q) + \frac{1}{2} d^2 G(p, q) + \frac{1}{3!} d^3 G(p, q) + \frac{1}{4!} d^4 G(p, q) + \dots + \frac{1}{n!} d^n G(p, q).$$

Particularmente, nos pontos singulares os vetores normais de ambas as superfícies são paralelos ($N = N_F = N_G$), e além disso, os termos do primeiro grau $dF(u, v) \cdot N = 0$, $dG(p, q) \cdot N = 0$; portanto, tem-se

$$\frac{d^2 F(u, v)}{2} \cdot N + \frac{d^3 F(u, v)}{3!} \cdot N + \dots + \frac{d^n F(u, v)}{n!} \cdot N = \frac{d^2 G(p, q)}{2} \cdot N + \frac{d^3 G(p, q)}{3!} \cdot N + \dots + \frac{d^n G(p, q)}{n!} \cdot N. \quad (4)$$

Sabe-se que os planos tangentes de F e G se coincidem no ponto singular, então pode-se escrever p' e q' como combinação linear de u' e v' . Nestes pontos, o vetor tangente unitário \vec{t} pode ser representado como uma combinação linear de F_u e F_v , ou de G_p e G_q , isto é,

$$\vec{t} = u' F_u + v' F_v = p' G_p + q' G_q, \quad (5)$$

que são duas equações lineares com quatro variáveis (u', v', p', q') . Como nestes pontos os vetores normais das superfícies são paralelos, temos que as curvaturas normais ($k_n^F = k_n^G$) são iguais

$$L_F(u')^2 + 2M_F u' v' + N_F (v')^2 = L_G(p')^2 + 2M_G p' q' + N_G (q')^2. \quad (6)$$

Esta equação é quadrática em (u', v', p', q') . As Eqs. (5) e (6) formam um sistema de quatro equações não lineares com quatro variáveis. Este sistema pode ser resolvido por representar p' e q' em termos de combinação linear de u' e v' da Eq. 5 e

$$p' = a_{11} u' + a_{12} v' \quad e \quad q' = a_{21} u' + a_{22} v'. \quad (7)$$

Com isso, reduzimos a Eq.(4) a uma função implícita $f(u', v') = 0$. Fazendo a substituição $u' = x$ e $v' = y$ tem-se

$$f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3x^3 + a_4x^2y + a_5xy^2 + a_6y^3 + a_7x^4 + a_8x^3y + a_9x^2y^2 + a_{10}xy^3 + a_{11}y^4 + \dots$$

4 Aplicação no Problema de Interseção de Superfícies

Um dos métodos numéricos mais utilizados para determinação da curva de interseção de duas superfícies regulares (SSI) é o de caminhada [3, 4, 9], que se baseia em achar um ponto inicial na curva de interseção e prosseguir caminhando ao longo da curva. A direção da caminhada é estimada com base nas propriedades geométricas das superfícies. Podem ocorrer pontos singulares (bifurcações ou cúspides) em torno dos quais é necessário avaliar o comportamento da curva para assegurar um percurso sem sobreposições, a menos nestes pontos. A simplicidade do algoritmo de classificação dos pontos do tipo A_k apresentada na seção 2, nos permitiu integrar num algoritmo de caminhada a identificação, e portanto, o processamento apropriado destes pontos.

Exemplo 1 : *A interseção de superfícies $F(u, v) = (1.2 * \cos(u) \sin(v), 1.6 * \sin(u) \sin(v), 2 * \cos(v))$ e $G(p, q) = (0.9 \cos(p) * \sin(q), 1.6 * \sin(p) * \sin(q), 2.5 * \cos(q))$ tem singularidades que correspondem aos pontos $(-1.57, -1.57)$ e $(1.57, -1.57)$ no domínio de parâmetros.*

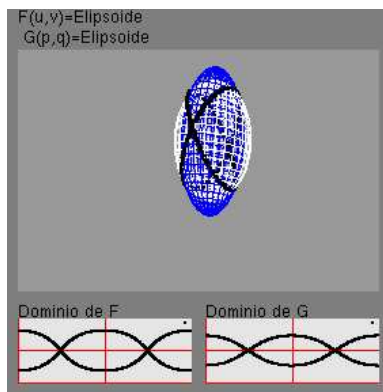


Figura 5: Nodes.

Expandindo ambas as superfícies em Taylor no ponto $(-1.57, -1.57)$, obtém-se a curva algébrica $f(x, y) = -1.24x^2 + 1.6y^2 + g(x, y)$, onde $g(x, y)$ tem grau ≥ 3 com singularidade na origem $(0, 0)$.

Se $a_1^2 - a_0a_2 = 0^2 - (-1, 24) * (1, 6) \neq 0$ então $A_1(\text{node})$, conforme ilustra a Figura 5.

Exemplo 2 : *A interseção de superfícies $F(u, v) = (u, v, u^4 + u^2v^2 - 2u^2v - uv^2 + v^2)$ e $G(p, q) = (p, q, 0)$ contém um ponto singular em $(u, v) = (p, q) = (0, 0)$ (Figura 6).*

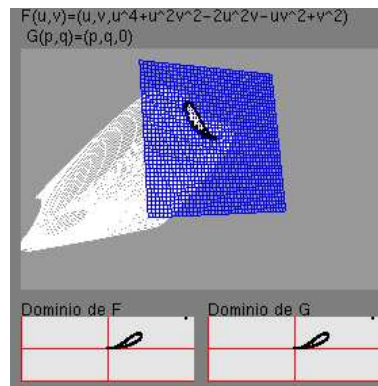


Figura 6: Cúspide de Ramphoid .

Expandindo-se em Taylor ambas as superfícies no ponto $(0, 0)$, obtém-se a curva algébrica $f(x, y) = y^2 - 2x^2y - xy^2 + x^4 + x^2y^2$ com singularidade também na origem $(0, 0)$. Neste caso, $b_0 = 1$, $b_4 = -2$, $b_5 = -1$, $b_9 = 1$, $b_{11} = 1$ e os outros coeficientes iguais a zero, então temos $b_0 \neq 0$, $b_6 = a_1^2 - a_0a_2 = 4b_0b_{11} - b_5^2 = 0$ e $4b_0^2b_{17} - 2b_0b_5b_{10} + b_4b_5^2 \neq 0$. Portanto, a singularidade é do tipo A_4 , (cúspide de Ramphoid), conforme mostra a Figura 6.

5 Exemplos usando o software SINGULAR

Exemplo 3 *A interseção de superfícies $F(u, v) = (u, v, u^4 + u^2v^2 - 2u^2v - uv^2 + v^2)$ e $G(p, q) = (p, q, 0)$ contém um ponto singular em $(u, v) = (p, q) = (0, 0)$ (Figura 6).*

Expandindo-se em Taylor ambas as superfícies no ponto $(0, 0)$, obtém-se a curva algébrica $f(x, y) = y^2 - 2x^2y - xy^2 + x^4 + x^2y^2$ com singularidade também na origem $(0, 0)$.

SINGULAR

A Computer Algebra System for Polynomial Computations

by: G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann
FB Mathematik der Universitaet, D-67653
Kaiserslautern

```
// ** executing /usr/local/Singular/2-0-5/LIB/
.singularrrc
```

```
> LIB "classify.lib";
> ring r=0, (x,y), ds;
> poly f= y^2-2*(x^2)*y-x*(y^2)+x^4+(x^2)*y^2;
> classify(f);
```

```
About the singularity :
Milnor number(f) = 4
Corank(f) = 1
```

```

Determinacy      <= 5
Guessing type via Milnorcode:  A[4]

Computing normal form ...
  Arnold step number 2
The singularity
  y2-2x2y-xy2+x4+x2y2
is R-equivalent to A[4].
  Milnor number = 4
  modality      = 0
y2+x5
>

```

Exemplo 4 A interseção de superfícies $F(u, v) = (u, v, \frac{3u^4}{4} + u^3 + \frac{u^2}{4} + \frac{7u^2v^2}{2} + uv^2 + v^4)$ e $G(p, q) = (p, q, 0)$ tem uma singularidade em $(u, v) = (p, q) = (0, 0)$ (Figura 4). Expandindo em Taylor obtém-se a seguinte curva algébrica com singularidade na origem $(0, 0)$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + x^3 + xy^2 + \frac{3x^4}{4} + \frac{7x^2y^2}{2} + y^4.$$

SINGULAR

A Computer Algebra System for Polynomial Computations

```

by: G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann
  FB Mathematik der Universitaet, D-67653
  Kaiserslautern
// ** executing /usr/local/Singular/2-0-5/LIB/
.singularrc
> LIB "classify.lib";
> poly f= (x^2)/4+x^3+xy^2+(3*x^4)/4+
(7*x^2*y^2)/2+y^4;
// ** redefining f **
> classify(f);
About the singularity :
  Milnor number(f)    = 5
  Corank(f)           = 1
  Determinacy         <= 6
Guessing type via Milnorcode:  A[5]

```

```

Computing normal form ...
  Arnold step number 2
The singularity
  1/4x2+x3+xy2+3/4x4+7/2x2y2+y4
is R-equivalent to A[5].
  Milnor number = 5
  modality      = 0
y2+x6

```

6 Conclusões

Existem diversas tabelas de classificação construídas com base na análise da codimensão de f e do co-posto da matriz hessiana associada a f . Algumas delas contém, além das singularidades do tipo A_k , outras singularidades do tipo D_k , com $k \geq 1$, e E_k , com $k \in \{6, 7, 8\}$. No entanto, não conseguimos implementá-la de forma simples sem envolver conceitos não usuais.

Neste trabalho, apresentamos um procedimento de classificação restrito às singularidades do tipo A_k , com base somente nos coeficientes da forma diagonalizada de f . Este procedimento foi facilmente integrado num algoritmo de interseção de superfícies, permitindo a determinação correta do traçado da curva de interseção.

Propoe-se ainda uma técnica de construção de difeomorfismos locais que nos permitirá derivar condições para todos os tipos A_k . Só não obtem-se resultados para k superior por limitações dos recursos computacionais que dispomos.

Para os outros tipos de singularidades, pretende-se estudar o potencial do Polígono de Newton para classificá-los.

Referências

- [1] O. Alessio, Traçado não-sobreposto de interseção de superfícies regulares com passos de contato de ordem 3. *Tese defendida na UNICAMP*, 2002.
- [2] V. I. Arnold, Singularity Theory, *Cambridge University Press*, 1981.
- [3] C. L. Bajaj and C. M. Hoffmann and J.E.Hopcroft and R.E.Lynch, Tracing surface intersections, *Computer Aided Geometric Design*,5-pag.285-307, 1988.
- [4] R. E. Barnhill and G. Farin and M. Jordan and B.R.Piper, Surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*,4-pag.3-16, 1987.
- [5] J.W.Bruce e P.J.Giblin, Curves and Singularities, *Cambridge-University Press*,1992,2nd.
- [6] M. P. Carmo, Differential geometry of curves and surface, *Prentice Hall Inc*, 1976.
- [7] C.G.Gibson, Singular points of smooth mappings, *Pitman*,1979.
- [8] M.Golubitsky e D.G.Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory*, Springer-Verlag, 1984.
- [9] J.Hoschek e D.Lasser, Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, *A.K.Peters, Ltd.*, Wellesly, Massachusetts, USA,1993.
- [10] X. Ye and T. Maekawa, Differential geometry of intersection curves of two surfaces, *Computer Aided Geometric Design*,16-pag.767-788, 1999.