Geometria Diferencial de Curvas de Interseção de Duas Superfícies Implícitas.

Osmar Aléssio e **Marcela L. V. de Souza**
UNINCOR- Universidade Vale do Rio Verde de Três Corações
Av. Castelo Branco, 82
CEP: 37.410-000, Três Corações, MG
E-mail: osmaralessio@yahoo.com.br e marcela@estruturalconsultoria.com.br.

1 Introdução

O problema de interseção de superfícies pode ser dos tipos: paramétrica-paramétrica, implícita-implícita e paramétrica-implícita. Em geral, o que se quer é obter a curva de interseção entre as duas superfícies. Para calcular a curva de interseção com precisão e eficiência, aproximações de ordem superior são necessárias, isto é, precisa-se obter as propriedades geométricas da curva de interseção. Enquanto geometria diferencial de curvas paramétricas pode ser encontrada em livros clássicos, há pouca literatura de geometria diferencial de curvas de interseção. Willmore em seu livro [2], descreve como obter o vetor tangente, vetor normal e o vetor binormal da curva de interseção de duas superfícies implícitas. Recentemente, Ye e Maekawa [3], forneceram as propriedades geométricas da curva de interseção para os três tipos acima. Diferentemente dos trabalhos anteriores, pretende-se fornecer as propriedades geométricas da curva de interseção de duas superfícies implícitas, usando o teorema da função implícita.

2 Geometria Diferencial de Curvas

Uma curva parametrizada $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u)), \quad u \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

é chamada de curva regular, se o seu vetor tangente

$$\dot\alpha(u) = (\dot x(u), \dot y(u), \dot z(u)) \tag{2}$$

for diferente de zero ($\neq 0$), para qualquer $u \in [a,b]$.
Se uma curva α é pelo menos de classe C^2, pode-se medir o quanto ela deixa de ser reta em qualquer ponto $\alpha(u)$ por sua curvatura, dada por

$$\kappa(u) = \frac{\|\dot\alpha(u) \times \ddot\alpha(u)\|}{\|\dot\alpha(u)\|^3}, \tag{3}$$

onde $\times$ denota o produto vetorial de dois vetores. Se $\kappa(u) = 0$, $\forall u \in [a,b]$, então $\alpha(u)$ é uma reta. Se $\kappa(u) = 0$ para um ponto isolado $P = \alpha(u_p)$, $u_p \in [a,b]$, então P é um ponto de inflexão ou um ponto planar. Da curvatura, pode-se encontrar o raio $r(u)$ do círculo osculador ($r(u) = \frac{1}{\kappa(u)}$) cuja primeira e segunda derivadas concordam com as da curva α no ponto $\alpha(u)$.
Se a curva for pelo menos de classe C^3 e $\kappa(u) \neq 0$, pode-se medir a variação de quanto ela deixa de ser plana por sua torção τ, dada por

$$\tau(u) = \frac{(\dot\alpha(u) \times \ddot\alpha(u)) \cdot \dddot\alpha}{\|\dot\alpha(u) \times \ddot\alpha(u)\|^2}. \tag{4}$$

A torção $\tau(u)$ é nula para curvas planas. As funções $\kappa(u)$ e $\tau(u)$ são independentes da parametrização. Quando o parâmetro s é tal que $|\ \dot\alpha(s)\ | = 1\ \forall s$, dizemos que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco s. Tem-se que $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ determinam uma curva em $\mathbb{R}^3$ de modo único.
Para qualquer ponto $\alpha(u)$ na curva α, pode-se introduzir um sistema de coordenadas especial para descrever as propriedades locais da curva. Este sistema de coordenadas com origem em $\alpha(u)$ tem eixos X, Z e Y, respectivamente, nas direções

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(u) &= \frac{\dot\alpha(u)}{\|\dot\alpha(u)\|}, \\
\mathbf{b}(u) &= \frac{\dot\alpha(u) \times \ddot\alpha(u)}{\|\dot\alpha(u) \times \ddot\alpha(u)\|}, \\
\mathbf{n}(u) &= b(u) \times t(u).
\end{aligned} \tag{5}$$

Os vetores unitários $\mathbf{t}(u)$, $\mathbf{n}(u)$ e $\mathbf{b}(u)$ são chamados, respectivamente, vetor tangente, vetor normal e vetor binormal. A orientação de $[\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}]$ é dada pela regra da mão direita, isto é, $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$.
Para uma curva α, parametrizada pelo comprimento de arco s, pode-se exprimir as derivadas destes vetores unitários em termos deles mesmos, através das chamadas **fórmulas de Frenet**:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= +\kappa(s)\mathbf{n}(s) \\
\mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\
\mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s)
\end{aligned} \tag{6}$$

2.1 Curvas Parametrizadas pelo comprimento de arco

Seja $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, ou em forma de vetor $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, a curva parametrizada pelo comprimento de arco s. Então temos

$$\alpha'(s) = \mathbf{t} \tag{7}$$

$$\alpha''(s) = \mathbf{k} = k\mathbf{n} \tag{8}$$

onde $\mathbf{t}$ é o vetor tangente unitário e $\mathbf{k}$ o vetor curvatura. De (8), segue que

$$k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \alpha'' \cdot \alpha'' \tag{9}$$

Agora vamos calcular a terceira derivada $\alpha'''(s)$ obtendo por diferenciar a Eq.(8)

$$\alpha'''(s) = k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' \tag{10}$$

onde podemos trocar $\mathbf{n}'$ pela segunda equação de (6), produzindo

$$\alpha'''(s) = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b} \tag{11}$$

Como os vetores $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ formam a base ortonormal com a orientação da mão-direita, a torção pode ser obtida de (11) por

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''(\mathbf{s})}{k} \tag{12}$$

3 Superfícies Implícitas

Definição 1 (Superfície Implícita) *Uma superfície implícita S é definida como o conjunto dos pontos do espaço que satisfazem à equação $f(x, y, z) = 0$. Formalmente:*
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$.

É comum referir-se abreviadamente à função $f(x, y, z)$ como sendo a própria superfície.

Teorema 1 (Teor. da Função Implícita) *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ um aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ de classe $C^k, k \geq 1$, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Então existem abertos $U \subset \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}$ com $(x_0, y_0, z_0) \in U \times V \subset A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tais que, para todo $(x, y) \in U$, existe um único $z = z(x, y) \in V$ tal que $f(x, y, z(x, y)) = 0$ e $z = z(x, y) \in C^k$.*

Sejam $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$ superfícies implícitas. Vamos assumir que estas superfícies são todas regulares. Em outras palavras

$$\nabla f \neq 0, \quad \nabla g \neq 0 \tag{13}$$

O vetor normal unitário da superfície implícita f é dado por

$$N^f = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \tag{14}$$

4 Representação Implícita das Curvas

A representação implícita de uma curva espacial pode ser expressa como uma curva de interseção entre superfícies implícitas

$$f(x, y, z) = 0 \cap g(x, y, z) = 0 \tag{15}$$

Se f e g tem derivada primeira contínua e se pelo menos um dos determinantes das matrizes jacobianas $\frac{D(f,g)}{D(x,y)}, \frac{D(f,g)}{D(x,z)}$ e $\frac{D(f,g)}{D(y,z)}$, for diferente de zero no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ da curva, é conhecido pelo teorema da função implícita que as equações $f = 0, g = 0$ podem ser resolvidas para duas das variáveis em função da terceira. Por exemplo, se $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(P_0) \neq 0$, para alguma vizinhança de z_0 podemos resolver (15) para x e y como função de z, obtendo uma representação da seguinte forma $x = x(z)$, $y = y(z)$, $z = z$ com z sendo o parâmetro. Isto define localmente uma curva paramétrica $\alpha(z) = (x(z), y(z), z)$. Se a matriz jacobiana $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(P_0) = 0$, podemos verificar se as outras matrizes jacobianas $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)}(P_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$, pois teríamos $\alpha(y) = (x(y), y, z(y))$ ou $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, respectivamente.

Podemos calcular as derivadas $\frac{df}{ds}$, $\frac{d^2f}{ds^2}$ e $\frac{d^3f}{ds^3}$ como segue:

$$\frac{df}{ds} = f_x x' + f_y y' + f_z z', \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{ds^2} = {} & f_{xx}(x')^2 + f_{yy}(y')^2 + f_{zz}(z')^2 + \\ & 2(f_{xy}x'y' + f_{yz}y'z' + f_{xz}x'z') + f_x x'' + \\ & f_y y'' + f_z z'',\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3 f}{ds^3} = {} & f_{xxx}(x')^3 + f_{yyy}(y')^3 + f_{zzz}(z')^3 + \\ & 3(f_{xxy}(x')^2 y' + f_{xxz}(x')^2 z' + f_{xyy}x'(y')^2 + \\ & f_{yyz}(y')^2 z' + f_{xzz}x'(z')^2 + f_{yzz}y'(z')^2 + \\ & 2f_{xyz}x'y'z') + 3(f_{xx}x'x'' + f_{yy}y'y'' + f_{zz}z'z'' + \\ & f_{xy}(x''y' + x'y'') + f_{yz}(y''z' + y'z'') + \\ & f_{xz}(x''z' + x'z'')) + f_x x''' + f_y y''' + f_z z'''.\end{aligned} \tag{18}$$

5 Trabalhos Existentes

Com base nas propriedades geométricas das duas superfícies regulares, $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ que se intersectam, foram propostas técnicas para estimar ou determinar exatamente as propriedades locais da curva de interseção. As propriedades geométricas serão calculadas somente nos pontos cuja a interseção das superfícies seja transversal, isto é, os vetores normais de ambas as superfícies não são paralelos. Para o caso tangencial veja **Ye e Maekawa** [3].

5.1 Vetor Tangente

Barnhill e Kersey [1], quando se trata de uma interseção transversal, a forma mais usual para obter o vetor tangente em cada ponto P é dada pelo produto vetorial dos vetores normais de ambas superfícies:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{N}^f(u,v) \times \mathbf{N}^g(p,q)}{\|\mathbf{N}^f(u,v) \times \mathbf{N}^g(p,q)\|}. \tag{19}$$

5.2 Vetor Curvatura e Curvatura

Ye e Maekawa [3] obtiveram expressões para a curvatura tanto nos pontos regulares quanto nos pontos singulares.

Para interseções transversais, o vetor curvatura da curva interseção no ponto P é perpendicular ao vetor tangente, logo ele está no plano formado pelos vetores normais das duas superfícies. Assim, ele pode ser expresso como uma combinação linear dos dois vetores:

$$\alpha''(s) = \alpha\mathbf{N}^f + \beta\mathbf{N}^g, \tag{20}$$

onde α e β são as incógnitas. A curvatura normal em P na direção t é a projeção do vetor $\alpha''(s)$ sobre o vetor normal unitário N da superfície em P dado por

$$k_n = \alpha''(s) \cdot \mathbf{N} = \kappa\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}. \tag{21}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} k_n^f &= \alpha + \beta\cos(\theta) \\ k_n^g &= \alpha\cos(\theta) + \beta, \end{aligned} \tag{22}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores normais $\mathbf{N}^f$ e $\mathbf{N}^g$.

Solucionando os coeficientes α e β pelo sistema Eq.(22), e substituindo-os na Eq.(20), temos

$$\alpha'' = \frac{k_n^f - k_n^g\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^f + \frac{k_n^g - k_n^f\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^g, \tag{23}$$

onde $\cos\theta = \mathbf{N}^f \cdot \mathbf{N}^g$.

A curvatura normal k_n para a superfície implícita é obtida por usar $\frac{d^2f}{ds^2}$ dado pela Eq.(17). A projeção do vetor curvatura $\alpha'' = (x'', y'', z'')$ sobre o vetor normal $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ da superfície, é dado por:

$$\begin{aligned} k_n^f &= \frac{f_x x'' + f_y y'' + f_z z''}{\sqrt[2]{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} \\ &= -\frac{f_{xx}(x')^2 + f_{yy}(y')^2 + f_{zz}(z')^2}{\sqrt[2]{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} + \\ &+ \frac{2(f_{xy}x'y' + f_{yz}y'z' + f_{xz}x'z')}{\sqrt[2]{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} \end{aligned} \tag{24}$$

onde x', y' e z' são as coordenadas do vetor tangente $t = \alpha'(s)$ dado pela Eq.(19).

A expressão da curvatura é dada exatamente por

$$\kappa = \frac{1}{|\sin\theta|}\sqrt{(k_n^f)^2 + (k_n^g)^2 - 2k_n^f k_n^g\cos\theta} \tag{25}$$

ou

$$\kappa = \|\alpha''(s)\| \tag{26}$$

Willmore [2] descreve como obter a curvatura da curva de interseção para duas superfícies implícitas.

Considere a curva de interseção representada pela equação $\alpha = \alpha(s)$, e sejam duas superfícies implícitas dadas por $f(\alpha(s)) = 0$ e $g(\alpha(s)) = 0$.

Agora o vetor tangente unitário da curva de interseção é ortogonal aos vetores normais de ambas as superfícies. Assim, se $\bigtriangledown f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, segue que $t = \alpha'(s)$ é paralelo a

$$\bigtriangledown f \times \bigtriangledown g = h. \tag{27}$$

Diz-se que $\lambda\alpha' = \bigtriangledown f \times \bigtriangledown g$.

Então

$$\lambda x' = h_1, \qquad \lambda y' = h_2, \qquad \lambda z' = h_3 \text{ e}$$

$$\lambda\frac{d}{ds} = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x}, h_2\frac{\partial}{\partial y}, h_3\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{28}$$

É conveniente denotar o operador(28) por Δ. Portanto

$$\Delta\alpha = \mathbf{h}. \tag{29}$$

Da definição de λ e h segue que

$$\lambda\mathbf{t} = \mathbf{h}, \tag{30}$$

e assim

$$\lambda^2 = \mathbf{h}^2. \tag{31}$$

Operando em (30) com Δ tem-se

$$\lambda^2 k\mathbf{n} + \lambda\lambda'\mathbf{t} = \Delta\mathbf{h}. \tag{32}$$

Aplicando o produto vetorial de (29) e (32) temos:

$$\lambda^3 k\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \Delta\mathbf{h} = \mathbf{k}, \tag{33}$$

logo a curvatura da curva é

$$k = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\lambda^3}. \tag{34}$$

O vetor curvatura $\alpha''(s)$ é dado por

$$\alpha''(s) = \frac{\mathbf{k}}{\lambda^3} \times \mathbf{t} = k\mathbf{b} \times \mathbf{t}. \tag{35}$$

5.3 Torção

Ye e Maekawa [3] obtiveram também expressões da torção para interseções transversais.
Como $\mathbf{N}^f$ e $\mathbf{N}^g$ estão no plano normal (plano gerado por $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$), os termos $k'\mathbf{n}+k\tau\mathbf{b}$ da Eq.(11) pode ser trocado pela combinação linear $\gamma\mathbf{N}^f + \delta\mathbf{N}^g$. Assim temos

$$\alpha'''(s) = -\kappa^2 t + \gamma\mathbf{N}^f + \delta\mathbf{N}^g. \tag{36}$$

Agora, se projetarmos $\alpha'''(s)$ sobre os vetores normais unitários N^f e N^g em P e denotarmos por λ_n^f e λ_n^g, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \lambda_n^f &= \gamma + \delta\cos(\theta), \\ \lambda_n^g &= \gamma\cos(\theta) + \delta. \end{aligned} \tag{37}$$

Resolvendo o sistema linear (37) para os escalares γ, δ e substituindo em (36) tem-se

$$\alpha''' = -\kappa^2\mathbf{t} + \frac{\lambda_n^f - \lambda_n^g\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^f + \frac{\lambda_n^g - \lambda_n^f\cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^g \tag{38}$$

Os parâmetros λ_n^f e λ_n^g para ambas as superfícies implícitas são obtidos usando $\frac{d^3 f}{ds^3}$ dado pela Eq.(18). A projeção do vetor curvatura $\alpha''' = (x''', y''', z''')$ sobre o vetor normal $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ da superfície, é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{f_x x''' + f_y y''' + f_z z'''}{\sqrt[2]{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} \\ &= -\frac{F_1 + F_2 + F_3}{\sqrt[2]{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}}, \end{aligned} \tag{39}$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{xxx}(x')^3 + f_{yyy}(y')^3 + f_{zzz}(z')^3, \\ F_2 &= 3[f_{xxy}(x')^2 y' + f_{xxz}(x')^2 z' + \\ &\quad f_{xyy}x'(y')^2 + f_{yyz}(y')^2 z' + f_{xzz}x'(z')^2 + \\ &\quad f_{yzz}y'(z')^2 + f_{xyz}x'y'z'], \\ F_3 &= 3[f_{xx}x'x'' + f_{yy}y'y'' + f_{zz}z'z'' + \\ &\quad f_{xy}(x''y' + x'y'') + f_{yz}(y''z' + y'z'') + \\ &\quad f_{xz}(x''z' + x'z'')], \end{aligned} \tag{40}$$

onde x', y' e z' são dados pela Eq.(19) e x'', y'' e z'' são dados pela Eq.(23).
Finalmente, a torção pode ser obtida da Eq.(12) como segue

$$\tau = \frac{\mathbf{b}\cdot\alpha'''}{k},$$

onde a curvatura κ é dada pela Eq.(25) e o vetor binormal pela expressão $\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$.

Willmore [2] descreve como obter a torção da curva de interseção para duas superfícies implícitas. Aplicando o operador Δ na Eq.(33) temos

$$\lambda\left(\lambda^3 k\right)'\mathbf{b} - \lambda^4 k\tau\mathbf{n} = \Delta\mathbf{k}. \tag{41}$$

Fazendo o produto escalar de (32) e de (41) temos

$$-\lambda^6 k^2\tau = \Delta\mathbf{h}.\Delta\mathbf{k}, \tag{42}$$

logo a torção é

$$\tau = -\frac{\Delta\mathbf{h}.\Delta\mathbf{k}}{\lambda^6 k^2}. \tag{43}$$

6 Método usando o Teorema da Função Implícita

6.1 Vetor Tangente

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a matriz jacobiana $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$, então temos localmente uma curva paramétrica $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Portanto temos que o ponto da curva $P_0 = \alpha(x_0)$ satisfaz as duas relações da forma

$$\begin{cases} f(x_0, y(x_0), z(x_0)) = 0 \\ g(x_0, y(x_0), z(x_0)) = 0 \end{cases} \tag{44}$$

Derivando as equações em relação a x, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial g}{\partial z}\dot{z} = 0 \end{cases} \tag{45}$$

onde $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ e $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$. O vetor tangente da curva $\alpha(x)$ no ponto $\alpha(x_0) = P_0$ é dado por $\dot{\alpha}(x_0) = (1, \dot{y}(x_0), \dot{z}(x_0))$. Para obter este vetor tangente, devemos resolver o sistema (45).

6.2 Vetor Curvatura e Curvatura

Derivando as equações dadas no sistema (45) em relação a x, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}\dot{y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z}\dot{z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial z}\ddot{z} = 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial y}\dot{y}\dot{y} + \frac{\partial g}{\partial y}\ddot{y} + \frac{\partial^2 g}{\partial z\partial z}\dot{z}\dot{z} + \frac{\partial g}{\partial z}\ddot{z} = 0 \end{cases} \tag{46}$$

onde $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ e $\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dx^2}$. O vetor curvatura da curva $\alpha(x)$ no ponto $\boldsymbol{\alpha}(x_0) = P_0$ é dado por $\ddot{\alpha}(x_0) = (0, \ddot{y}(x_0), \ddot{z}(x_0))$. A curvatura da curva no ponto $\boldsymbol{\alpha}(x_0) = P_0$ é

$$\kappa(x_0) = \frac{\|\dot{\alpha}(x_0)\times\ddot{\alpha}(x_0)\|}{\|\dot{\alpha}(x_0)\|^3}$$

6.3 Torção

Derivando as equações dadas no sistema (46) em relação a x, temos

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y\partial y}\left(\dot{y}\right)^3+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}\dot{y}\ddot{y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}\dot{y}\ddot{y}+\frac{\partial f}{\partial y}\dddot{y}+ \\ \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial z\partial z}\left(\dot{z}\right)^3+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z}\dot{z}\ddot{z}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z}\dot{z}\ddot{z}+\frac{\partial f}{\partial z}\dddot{z}=0 \\ \frac{\partial^3 g}{\partial x\partial x\partial x}+\frac{\partial^3 g}{\partial y\partial y\partial y}\left(\dot{y}\right)^3+2\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial y}\dot{y}\ddot{y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial y}\dot{y}\ddot{y}+\frac{\partial g}{\partial y}\dddot{y}+ \\ \frac{\partial^3 g}{\partial z\partial z\partial z}\left(\dot{z}\right)^3+2\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial z}\dot{z}\ddot{z}+\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial z}\dot{z}\ddot{z}+\frac{\partial g}{\partial z}\dddot{z}=0 \end{array}\right. \tag{47}$$

onde $\dddot{y} = \frac{d^3y}{dx^3}$ e $\dddot{z} = \frac{d^3z}{dx^3}$. O vetor $\dddot{\alpha}\,(x)$ no ponto $\alpha\,(x_0) = P_0$ é dado por $\dddot{\alpha}\,(x_0) = (0, \dddot{y}\,(x_0)\,, \dddot{z}\,(x_0))$. A torção da curva no ponto $\boldsymbol{\alpha}\,(x_0) = P_0$ é

$$\tau(x_0) = \frac{(\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)) \cdot \dddot{\alpha}(x_0)}{\|\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)\|^2}$$

7 Exemplos

Será calculado o vetor tangente, vetor curvatura, curvatura e a torção no ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ da curva de interseção da esfera com o cilindro dadas pelas equações implícitas:

$$\left\{\begin{array}{c} f\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g\,(x, y, z) = x^2 + y^2 - x = 0 \end{array}\right. \tag{48}$$

Os vetores gradientes são:
$\bigtriangledown f = (2x, 2y, 2z)$ e
$\nabla g = (2x - 1, 2y, 0)\,.$

7.1 Método Ye e Maekawa

7.1.1 Vetor Tangente

Por **Barnhill e Kersey** [1] o vetor tangente é dado por

$$\mathbf{t} = \frac{N^f(u, v) \times N^g(p, q)}{\mid N^f(u, v) \times N^g(p, q) \mid}$$

No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos $\mathbf{N}^f = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\mathbf{N}^g = (0, 1, 0)$.
Portanto o vetor **tangente** é

$$\mathbf{t}(s_0) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \tag{49}$$

7.1.2 Vetor Curvatura e Curvatura

O vetor curvatura é dado pela Eq.(23)

$$\alpha''(s) = \frac{k_n^f - k_n^g \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^f + \frac{k_n^g - k_n^f \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^g,$$

e a expressão da curvatura é dada exatamente por

$$\kappa = \frac{1}{\mid \sin\theta \mid}\sqrt{(k_n^f)^2 + (k_n^g)^2 - 2k_n^f k_n^g \cos\theta}$$

Agora precisamos calcular as duas curvaturas normais k_n^f e k_n^g e os ângulos $\cos\theta$ e $\sin\theta$ em P. Para calcular k_n^f e k_n^g usamos a Eq.(24).

No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos:
$k_n^f = -1$, $k_n^g = -\frac{4}{3}, \cos\theta = \frac{1}{2}$ e $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Portanto o **vetor curvatura** é

$$\alpha''(s_0) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \tag{50}$$

e a **curvatura** é

$$\kappa = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}. \tag{51}$$

7.1.3 Torção

O vetor α''' é dado pela Eq.(38)

$$\alpha''' = -\kappa^2\mathbf{t} + \frac{\lambda_n^f - \lambda_n^g \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^f + \frac{\lambda_n^g - \lambda_n^f \cos\theta}{\sin^2\theta}\mathbf{N}^g$$

e a expressão da torção é dada pela Eq.(12)

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''}{k}$$

Os parâmetros λ_n^f e λ_n^g são dados pela Eq.(39).
No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos: $\lambda_n^f = 0$, $\lambda_n^g = \frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Portanto

$$\alpha'''(s_0) = (\tfrac{40\sqrt{6}}{81}, \tfrac{4\sqrt{6}}{9}, -\tfrac{76\sqrt{3}}{81}).$$

Para calcular a torção precisamos encontrar o vetor binormal $\mathbf{b}$, mas antes devemos encontrar o vetor $\mathbf{n}$, isto é

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k} = \left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{3}{13}}, -2\sqrt{\tfrac{3}{13}}, -\tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{6}{13}}\right)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\tfrac{2\sqrt{13}}{13}, -\tfrac{\sqrt{13}}{13}, \tfrac{2\sqrt{26}}{13}\right)$$

Então a **torção** é

$$\tau = \frac{\mathbf{b} \cdot \alpha'''}{k} = \frac{6\sqrt{2}}{13}. \tag{52}$$

7.2 Método Willmore

7.2.1 Vetor Tangente

Agora o vetor tangente unitário é calculado usando as Eqs.(27),(30) e (31).
A Eq.(27) é dada por
$h = \bigtriangledown f \times \bigtriangledown g = (-4yz, 4xz - 2z, 2y)$,
pois $\bigtriangledown f = (2x, 2y, 2z)$ e $\bigtriangledown g = (2x - 1, 2y, 0)$.
No ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, temos $\bigtriangledown f = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$ e $\bigtriangledown g = (0, 1, 0)\,.$ Portanto
$h(P_0) - = \left(-\sqrt{2}, 0, 1\right)\,.$
Da Eq.(30) temos $\lambda t = \left(-\sqrt{2}, 0, 1\right)$, consequentemente
$\lambda x' = -\sqrt{2}, \qquad \lambda y' = 0, \qquad \lambda z' = 1.$
Da Eq.(31) tem-se
$\lambda^2 = \mathbf{h}^2 = 3 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$
Obtendo o **vetor tangente**

$$\mathbf{t} = \pm\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \tag{53}$$

7.2.2 Vetor Curvatura e Curvatura

Escolhendo $\mathbf{t} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \lambda = \sqrt{3}$.
Usando o operador Δ em h temos:
$\Delta h = \lambda(-4y'z - 4yz', 4x'z + 4xz' - 2z', 2y')$.
Usando as coordenadas do ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e do vetor tangente dado em (53),
$\Delta\mathbf{h}(P_0) = (-2, -4, 0)$.
Aplicando o produto vetorial de $\mathbf{h}(P_0)$ e $\Delta\mathbf{h}(P_0)$ temos:
$\mathbf{k} = \mathbf{h}(P_0) \times \Delta\mathbf{h}(P_0) = (4, -2, 4\sqrt{2})$,
então a **curvatura** da curva é

$$k = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\lambda^3} = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}. \tag{54}$$

O **vetor curvatura** $\alpha''(s)$ é dado pela Eq.(35)

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \tag{55}$$

7.2.3 Torção

Fazendo o produto vetorial de $\mathbf{h}$ por $\Delta\mathbf{h}$ temos
$\mathbf{k} = \mathbf{h} \times \Delta\mathbf{h}$
= (-4yz,4xz-2z,2y) $\times$
$\lambda(-4y'z - 4yz', 4x'z + 4xz' - 2z', 2y')$
Usando o operador Δ em $\mathbf{k}$ temos:
$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{h} \times \Delta^2\mathbf{h} = (-4yz, 4xz - 2z, 2y)\times$
$4\lambda^2(-y''z - 2y'z' - yz'', x''z + 2x'z' + xz'' - \frac{1}{2}z'', \frac{1}{2}y'')$
Substituindo as coordenadas do ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, do vetor tangente α' dado por (53) e do vetor curvatura α'' dado por (55) temos
$\Delta\mathbf{k} = \left(\frac{28\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{56}{3}\right)$.
Pela Eq.(43), a **torção** é o produto escalar de $\Delta\mathbf{h}$ por $\Delta\mathbf{k}$ dividido por $\lambda^6 k^2$, logo temos

$$\tau = -\frac{\Delta\mathbf{h}.\Delta\mathbf{k}}{\lambda^6 k^2} = \frac{6\sqrt{2}}{13} \tag{56}$$

7.3 Método função implícita

7.3.1 Vetor Tangente

Escolhendo x como parâmetro, pois $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$ no ponto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, o sistema (45) torna-se

$$\begin{cases} 2x + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \\ 2x + 2y\dot{y} - 1 = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ e $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos

$$\begin{cases} 1 + \dot{y} + \sqrt{2}\dot{z} = 0 \\ 1 + \dot{y} - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

O vetor $\dot{\alpha}$ é

$$\dot{\alpha}(\frac{1}{2}) = (1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}). \tag{57}$$

O **vetor tangente unitário** na direção contrária de $\dot{\alpha}$ é

$$\mathbf{t}(\frac{1}{2}) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \tag{58}$$

7.3.2 Vetor Curvatura e Curvatura

O sistema (46) torna-se

$$\begin{cases} 2 + 2\dot{y}\dot{y} + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}\dot{z} + 2z\ddot{z} = 0 \\ 2 + 2\dot{y}\dot{y} + 2y\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{x} = 1, \dot{y} = 0$, $\dot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se

$$\begin{cases} 2 + \ddot{y} + 1 + \sqrt{2}\ddot{z} = 0 \\ 2 + \ddot{y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \ddot{y} = -2 \end{cases}$$

Logo o **vetor derivada segunda** é

$$\ddot{\alpha}(\frac{1}{2}) = \left(0, -2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \tag{59}$$

A **curvatura** é

$$\kappa(u) = \frac{\|\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)\|}{\|\dot{\alpha}(u)\|^3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}. \tag{60}$$

O vetor curvatura é $\alpha''(x_0) = k\mathbf{n}(x_0)$, onde $\mathbf{n}(x_0) = \mathbf{b}(x_0) \times \mathbf{t}(x_0)$ e $\mathbf{b}(x_0) = \frac{\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)}{\|\dot{\alpha}(x_0) \times \ddot{\alpha}(x_0)\|}$.
Temos $\mathbf{b}(x_0) = (-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{13}}{13}, -\frac{4\sqrt{26}}{26})$,
$\mathbf{n}(x_0) = (-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{39})$ e
$\alpha''(x_0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}(-\frac{\sqrt{39}}{39}, -\frac{2\sqrt{39}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{39})$.

O **vetor curvatura** é

$$\alpha''(x_0) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \tag{61}$$

7.3.3 Torção

O sistema (47) torna-se

$$\begin{cases} 4\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2y\dddot{y} + 4\dot{z}\ddot{z} + 2\dot{z}\ddot{z} + 2z\dddot{z} = 0 \\ 4\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2y\dddot{y} = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{x} = 1, \dot{y} = 0$, $\dot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -2$, $\ddot{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos

$$\begin{cases} \dddot{y} + 2 + 1 + \sqrt{2}\dddot{z} = 0 \\ \dddot{y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dddot{z} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \dddot{y} = 0 \end{cases}$$

Logo o vetor terceira derivada é

$$\dddot{\alpha}(\frac{1}{2}) = (0, 0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}). \tag{62}$$

A **torção** é

$$\tau(u) = \frac{(\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)) \cdot \dddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}(u) \times \ddot{\alpha}(u)\|^2} = \frac{6\sqrt{2}}{13}, \tag{63}$$

Referências

[1] R. E. Barnhill and S. N. Kersey. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1–4):257–280, 1990.

[2] T. J. Willmore. *An Introduction to Differential Geometry*. Clarendon Press, Oxford, 1959.

[3] X. Ye and T. Maekawa. Differential geometry of intersection curves of two surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 16:767–788, 1999.