

# MODELO COSMOLÓGICO ESTÁTICO DE SCHWARZSCHILD NA TEORIA 5D ESPAÇO-TEMPO-MATÉRIA

**Pablo H. Pereyra**

Depto de Matemática, UNISC,FACOS\*,FACCAT†,FAPA‡  
 Av.Independência, 2293  
 96815-900,Santa Cruz do Sul,RS  
 E-mail: [pablohpp@yahoo.com.br](mailto:pablohpp@yahoo.com.br),

## Resumo

Com o presente trabalho, realiza-se uma imersão em 5D da solução interna de Schwarzschild para as equações da relatividade geral, no contexto de uma teoria do tipo 5D espaço-tempo-matéria Riemann Flat , mostrando que tal solução pode ser encarada como homogênea e isotrópica obedecendo o princípio cosmológico e servindo como modelo para tal. Neste modelo o universo comporta-se como uma estrela idealizada de densidade constante e pressão variável, onde todo observador é centro da mesma, e o red-shift observado aparece como um efeito gravitacional estático que obedece a lei do quadrado da distância de observação.

## Resultados

Resultados recentes [1],[5-6],[19] na área de cosmologia mostram a possibilidade de imersão de modelos cosmológicos (estáticos e não-estáticos) em espaços 5D planos (Riemann flat) , possibilitando uma melhor compreensão do comportamento de tais modelos no sentido gráfico [5], abrindo novas perspectivas no tópico quantização [2],[18], e unificando os mesmos com mesma origem geométrica . Porém já em 1930 Tolman [13-14] um dos pioneiros na área aplicava técnicas de imersão em 5D para mostrar a homogeneidade e a geometria de modelos cosmológicos estáticos e não-estáticos.

Segundo os procedimentos de Tolman [15] e outros [4],[11] os únicos modelos estáticos possíveis reduzem-se a três: Einstein, De Sitter e Relatividade Restrita, que satisfazem o princípio cosmológico (homogeneidade e isotropia).

Neste trabalho, utilizando uma técnica semelhante à utilizada por Tolman, mostra-se a possibilidade de outro modelo estático dado pela solução interna de Schwarzschild para a Relatividade Geral [10] (primeiro modelo idealizado para uma estrela como um fluido incompressível , com distribuição de simetria esférica de raio  $r_l$  e densidade  $\rho_{00}$  constante ), com métrica em unidades naturais ( $G=1, c=1$ ) dada por

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left( A - B \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} \right)^2 dt^2 \quad (1)$$

onde

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho_{00}} \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{1-\frac{r_l^2}{R^2}} \quad B = \frac{1}{2} \quad m = \frac{4\pi}{3} \rho_{00} r_l^3 \quad (2)$$

São dadas as transformações

$$r = R \sin \chi \quad (3)$$

$$\alpha = R \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (4)$$

$$\beta = R \sin(\chi) \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (5)$$

$$\gamma = R \sin(\chi) \cos(\theta) \quad (6)$$

$$\delta = R \cosh\left(\frac{t}{R}\right) A - B \cos(\chi) \quad (7)$$

$$\varepsilon = R \sinh\left(\frac{t}{R}\right) A - B \cos(\chi) \quad (8)$$

que levam esta solução a uma métrica de Minkowski em 5D (M-5 Riemann flat)

$$ds^2 = -d\alpha^2 - d\beta^2 - d\gamma^2 - d\delta^2 + d\varepsilon^2 \quad (9)$$

A simetria translacional (homogeneidade) da métrica (1) é mostrada realizando transformações de translação e rotação nas coordenadas da métrica (9), que mantém invariante seu elemento de linha , ou seja, transformações de Lorentz.

Supõe-se um sistema inicial  $I^4$  4D, nas coordenadas da métrica (1) com um objeto observado ( $G$ ) (Galáxia) na posição  $r=0$  (ângulos indeterminados) e tempo  $t=T$  , e um observador ( $O$ ) na posição  $r=r_l$  (ângulos nulos) e tempo  $t=T$  , como mostra a tabela (1):

Sistema $I^4$	$r$	$\theta$	$\phi$	$t$
$G$	0	...	...	$T$
$O$	$r_l$	0	0	$T$

Tabela 1: Sistema Inicial - 4D

A seguir, utilizando as transformações (3)-(8), são obtidos os correspondentes valores nas coordenadas da métrica (9) ,em um sistema inicial  $I^5$  5D, como mostra a tabela (2):

\*Rua 24 de Maio,141,Centro,95520-000,Osório-RS,

†Av. Oscar Martins Rangel,4500,(RS115)-95600-000-Taquara-RS

‡Av.Manoel Elias,2001,91240-261-Porto Alegre-RS

Sistema $I^5$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
$G$	0	0	0	$R \cosh\left(\frac{t}{R}\right)(A-B)$	$R \sinh\left(\frac{t}{R}\right)(A-B)$
$O$	0	0	$r_l$	$R \cosh\left(\frac{t}{R}\right)\left(A-B\sqrt{1-\frac{r_l^2}{R^2}}\right)$	$R \sinh\left(\frac{t}{R}\right)\left(A-B\sqrt{1-\frac{r_l^2}{R^2}}\right)$

Tabela 2: Sistema Inicial - 5D

A mudança na origem do sistema inicial  $I^4$  é obtida realizando transformações de Lorentz  $L$  nas coordenadas do sistema  $I^5$ . Desta forma é dado um sistema final  $F^5$  5D através da transformação  $L: I^5 \rightarrow F^5$ , com métrica

$$ds^2 = -d\alpha'^2 - d\beta'^2 - d\gamma'^2 - d\delta'^2 + d\varepsilon'^2 \quad (10)$$

e valores nas coordenadas dados pela tabela (3):

Sistema $F^5$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$	$\delta'$	$\varepsilon'$
$G$	0	0	$-r_l$	$R \cosh\left(\frac{t}{R}\right)\left(A-B\sqrt{1-\frac{r_l^2}{R^2}}\right)$	$R \sinh\left(\frac{t}{R}\right)\left(A-B\sqrt{1-\frac{r_l^2}{R^2}}\right)$
$O$	0	0	0	$R \cosh\left(\frac{t}{R}\right)(A-B)$	$R \sinh\left(\frac{t}{R}\right)(A-B)$

Tabela 3: Sistema Final - 5D

Por sua vez, utilizando novamente as transformações (3)-(8), chega-se a um sistema final  $F^4$  4D, com métrica igual à (1) dada por

$$ds^2 = -\frac{dr'^2}{1-\frac{r'^2}{R^2}} - r'^2 d\theta'^2 - r'^2 \sin^2\theta' d\phi'^2 + \left(A-B\sqrt{1-\frac{r'^2}{R^2}}\right)^2 dt'^2 \quad (11)$$

e valores nas coordenadas dados pela tabela (4):

Sistema $F^4$	$r'$	$\theta'$	$\phi'$	$t'$
$G$	$r_l$	$\pi$	...	$T$
$O$	0	...	...	$T$

Tabela 4: Sistema Final - 4D

onde se verifica a mudança na origem do sistema de coordenadas (a menos de três ângulos indeterminados), de forma que ( $G$ ) possui coordenada  $r'=r_l$ , e o observador ( $O$ ) possui coordenada  $r'=0$ .

Este resultado se apresenta como uma contradição em 4D, pois contraria uma das características iniciais para construção do modelo que é a pressão variável (não homogeneidade). Já o modelo M-5 5D mostra que a pressão é constante independente do observador e é dada por

$$p_0 = \frac{3}{8\pi R^2} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_l^2}{R^2}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_l^2}{R^2}} - 1} \right) \quad (12)$$

dependendo apenas da distância  $r_l$  relativa entre observador ( $O$ ) e objeto observado ( $G$ ) em questão na translação.

Tal resultado é interpretado no contexto de uma teoria do tipo 5D espaço-tempo-matéria (STM) plana [7-8], já que deve ser mantida a invariância da métrica (9), e a contradição é resolvida admitindo-se a perda do caráter absoluto da matéria em tal teoria, ou seja, assim como na teoria da relatividade espaço e tempo são relativos aos observadores, numa teoria STM a matéria também é relativa aos observadores. Uma teoria deste tipo tem como característica principal considerar a matéria no seu aspecto geométrico puro, ou seja, uma nova dimensão espacial inclui sua medida geométrica, como na teoria 5D STM de Wesson [19].

A condição relativa da matéria no modelo pode ser observada na seguinte figura

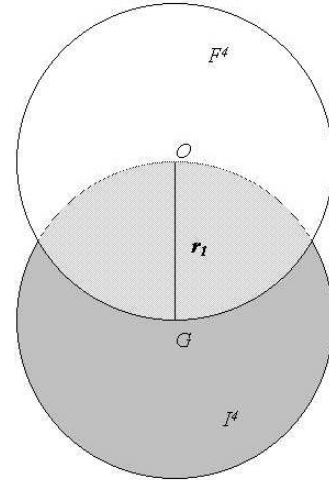


Figura 1: Condição Relativa da Matéria

onde na passagem do sistema  $I^4$  ( $G$  em  $r=0$ ) para o sistema  $F^4$  ( $O$  em  $r'=0$ ), supondo uma distribuição de raio  $r_l$ , a parte de matéria em cinza escuro não influencia a métrica (11), mas sim a métrica (1).

É percebido na técnica aplicada que a homogeneidade da métrica (1) é obtida mediante transformações de Lorentz no contexto 5D plano (simetria translacional e rotacional da métrica (9)), sugerindo uma teoria STM plana como uma possível extensão da teoria da Relatividade Restrita, que contém implicitamente aspectos da teoria da Relatividade Geral mediante uma redução de dimensionalidade (4D). Esta redução consiste nas transformações de coordenadas da correspondente imersão.

Outro aspecto importante do modelo é o efeito red-shift de observação que indica a expansão intrínseca do espaço (red-shift Cosmológico), e que sob o ponto de vista de uma métrica interna estática se transforma num efeito red-shift Gravitacional com lei diretamente proporcional ao quadrado da distancia de observação  $r_l$ , ou seja, um shift gravitacional dado por

$$z = \frac{\delta v}{v} \sim k r_l^2 \quad (13)$$

( $k$  é uma constante que depende da densidade) que corresponde a um red-shift acelerado, estando de acordo com observações astronômicas recentes [9-10],[17]. Este resultado é fundamentado no trabalho de Tolman [16] e salientado por Zeldovich-Novikov [20] que estabelece que a matéria externa a uma distribuição de simetria esférica não possui efeito gravitacional sobre a matéria interna (isto considerando um raio  $r_l$  como limite de separação). O objeto observado ( $G$ ), é considerado com um potencial temporal dado por uma distribuição de matéria esférica com raio  $r=r_l$ , ou seja na superfície da distribuição; logo obtém-se para este potencial

$$g_{tt} = 1 - \frac{2m}{r_l}$$

Já o observador ( $O$ ) é considerado com um potencial temporal dado por uma distribuição de matéria esférica com raio  $r_l' \rightarrow 0$ , localizado em  $r'=0$ , ou seja,  $g_{tt}' \rightarrow 1$ , pois, não é influenciado pela distribuição de matéria exterior (isto considerando uma distribuição em grande escala), como pode ser observado na seguinte figura

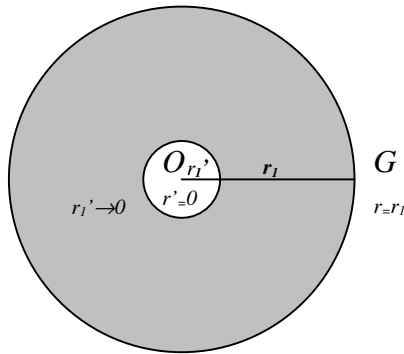


Figura 2: Potenciais para o "Shift Gravitacional"

O resultado (13) pode ser comprovado experimentalmente realizando um ajuste de curva (interpolação) coerente com os dados para o red-shift observados e a estimativa de densidade  $\rho_{00}$  que esta implícita na constante  $k$ , resumidamente o coeficiente  $k$  da parábola, determinado por  $\rho_{00}$ ,

deverá ajustar de maneira satisfatória a curva do red-shift observado. Cabe notar que o mesmo resultado pode ser utilizado de forma inversa para melhorar a estimativa de  $\rho_{00}$  com base no red-shift observado.

A estabilidade do modelo é comentada numa avaliação preliminar, mostrando um comparativo com o teorema de Buchdahl [3] que apresenta o limite Massa-Raio para a estabilidade de qualquer distribuição de matéria com simetria esférica e densidade constante, dado por

$$\frac{m}{r_l} \leq \frac{4}{9} \quad (14)$$

e por (2) obtém-se a relação

$$r_l^2 \leq \frac{1}{3\pi\rho_{00}} \quad (15)$$

como limite do raio de distribuição de matéria (e de observação) em função da densidade. O resultado (15) pode ser verificado experimentalmente calculando a densidade estimada em diversas esferas de observação astronômica (em grande escala) de raios  $r_l$  (ou seja considerar a massa de todos os objetos observados internos à esfera de observação com raio  $r_l$ ). Outra experimentação seria a impossibilidade de se observar um objeto a uma distância maior do que a imposta por (15) levando em conta a estimativa atual da densidade de matéria  $\rho_{00}$  em grande escala. É importante notar que o resultado (15) pode servir também para ajustar o valor de  $\rho_{00}$  se for considerado o objeto de maior distância  $r_l$  já observado.

Por último um resultado observacional esperado para este modelo, dada sua configuração estática e livre de singularidades no tempo (universo sem big bang), é o de se observar estruturas de matéria (galáxias) a grandes distâncias, de conformação semelhante às (galáxias) mais próximas, sugerindo que os processos de criação e destruição de matéria seriam de característica local.

Como conclusão são comentados os principais resultados: a possibilidade de outro modelo estático não considerado até então; a condição relativa da distribuição de matéria (a inexistência de um centro absoluto) e a indagação se em distribuições de grande escala esta característica poderia afetar a observação da dinâmica local de objetos observados, já que como visto na Figura 1, uma parte da distribuição de matéria não influencia a métrica do observador; o limite de observação dado por (15) que pode ser calculado em unidades de tempo

cósmico considerando a velocidade da luz; o redshift acelerado apesar do modelo ser estático e a algumas possibilidades de comprovações experimentais do modelo.

Agradecimentos aos professores Paul Wesson (Univ. Waterloo), Bardo Bodmann (UFPEL) e Waldir Roque (UFRGS) pela atenção ao trabalho, às instituições UNISC, FACOS, FACCAT e FAPA pelo apoio para a participação no XXVIII CNMAC.

## Referências

- [1] G. Abolghasem, A.A. Coley, and D.J. McManus, 1996, Induced matter theory and embeddings in Riemann flat spacetimes, *J. Math. Phys.* 37, 361-373.
- [2] M. Bertola, V. Gorini, U. Moschella, R. Schaeffer, Correspondence between Minkowski and de Sitter Quantum Field Theory, hep-th/9906035 v2
- [3] H. Buchdahl, General Relativistic Fluid Spheres *Phys. Rev.* 116, 1027 (1959).
- [4] A. Friedmann, Über die Krümmung des Raumes, *Zeits. f. Physik* 10, pp. 377-386 (1922);
- [5] M. Lachièze-Rey, The Friedmann - Lemaitrè models in perspective, *Astronomy and Astrophysics*, 364, 894-900, 2000
- [6] DJ McManus, Five-dimensional cosmological models in induced matter theory, *J. Math. Phys.* 35, 4889 (1994).
- [7] P.H. Pereyra.; B.E.J Bodmann, – Uma Transformação de Lorentz Pentadimensional e suas possíveis Implicações- *Scientia*, Vol. 12 No. 1- 2001 – Unisinos
- [8] P.H. Pereyra; B.E.J. Bodmann – Uma Extensão Dimensional da Transformação de Lorentz e uma Aplicação à Interferência Induzida por Gravitação – *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional – Vol.3, No.2*, (2002), 181-188.
- [9] A.G. Riess, et.al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116 1009 (1998), astro-ph/9805201; S. Perlmutter, et.al., Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae, *Astrophys. J.* 517 565 (1999), astro-ph/9812133.
- [10] A.G. Riess, et.al., Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution, astro-ph/0402512.
- [11] H.P. Robertson, On the Foundations of Relativistic Cosmology, *Proc. Nat. Acad.* 15, 822 (1929)
- [12] K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (1916), arXiv:physics/9912033 v1, 1999 (em inglês)
- [13] Tolman, On the estimation of distances in a curved universe with a non-static line element, *Proc. Nat. Acad.* 16, 511 (1930)
- [14] R.C. Tolman, *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Dover Publications, Inc., 1987
- [15] R.C. Tolman, On the possible line elements for the Universe, *Proc. Nat. Acad.* 15, 297 (1929)
- [16] R.C. Tolman, Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55:364-373, 1939.
- [17] J.L. Tonry, et.al., Cosmological Results from High-z Supernovae, *Astrophys. J.* 594 1(2003), astro-ph/0305008; R.A. Knop, et.al., New Constraints on  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , and w from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST, astro-ph/0309368; B.J. Barris, et.al., 23 High Redshift Supernovae from the IfA Deep Survey: Doubling the SN Sample at  $z < 0.7$ , *Astrophys. J.* 602 571 (2004), astro-ph/0310843.
- [18] R. Triay, L. Spinelli, R. Lafaye, Framework for cosmography at high redshift, 1996, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, 279, 564
- [19] P. S. Wesson, *Space-Time-Matter*, World Scientific, Singapore, 1999
- [20] Ya. B. Zel'dovich, I. D. Novikov, *Stars and Relativity*, Dover P. Inc. 1996