

Solução das equações de Navier-Stokes bidimensionais na formulação da função corrente pelo método de elementos finitos de Galerkin descontínuo

Paulo Rafael Bösing*

Doutorando pelo Departamento de Matemática Aplicada, IME, USP,
05508-090, Rua do Matão, 1010, São Paulo, SP, Brasil.

E-mail: paulo@ime.usp.br,

Igor Mozolevski†

Departamento de Matemática, UFSC,
88040-900, Trindade, Florianópolis, SC, Brasil

E-mail: igor@mtm.ufsc.br.

Resumo

Neste artigo apresentamos a construção, validação, e aplicação de uma versão hp do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo com penalização interior (DGFEM), para a solução numérica das equações de Navier-Stokes bidimensionais, incompressíveis e em regime permanente.

Usando a formulação de função corrente, que assegura que a restrição de incompressibilidade seja automaticamente satisfeita, reduzimos as equações de Navier-Stokes para uma equação elíptica de quarta ordem não-linear. Para essa equação, apresentamos uma formulação do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo com penalização interior.

Usando o método de Newton-Raphson para resolver a não linearidade da equação, apresentamos exemplos numéricos que confirmam a convergência e precisão do método. Além disso, incluímos aplicações do método na resolução de problemas de testes clássicos da dinâmica de fluidos computacionais, tais como, “backward-facing step”.

1 Espaço de Elementos Finitos

Seja Ω um domínio poliedral, limitado e aberto em R^2 com fronteira $\partial\Omega$. Seja $\{\mathcal{T}_h\}$ ($h > 0$) uma família regular de partições de Ω composta por elementos κ_i , abertos, disjuntos e convexos de maneira que,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \bar{\kappa}.$$

Assumimos que cada elemento $\kappa \in \mathcal{T}_h$ é imagem de um elemento mestre fixo $\hat{\kappa}$ por uma aplicação afim, isto é, $\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\hat{\kappa})$.

*Bolsista do CNPq-Brasil

†Apoio parcial do CNPq-Brasil

Sobre a partição \mathcal{T}_h , consideramos a função constante por partes $h_{\mathcal{T}_h}$ definida por

$$h_{\mathcal{T}_h}(x) = h_\kappa = \text{diam}(\kappa), \quad x \in \kappa, \quad \kappa \in \mathcal{T}_h.$$

O espaço de Sobolev de ordem real t de funções de valores reais sobre Ω , vai ser denotado por $H^t(\Omega)$, e seu produto interno será $(\cdot, \cdot)_{H^t(\Omega)}$. Para $L_2(\partial\Omega) = H^0(\partial\Omega)$ o produto interno será

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L_2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \phi \psi ds.$$

Para um m inteiro positivo, $Q_m(\hat{\kappa})$ denotará o espaço tensorial dos polinômios de grau menor ou igual a m em cada direção coordenada definidos sobre o elemento mestre $\hat{\kappa}$. Sendo cada elemento κ imagem pela aplicação afim \mathcal{F}_κ do elemento mestre, designamos por p_κ a ordem m de $Q_m(\hat{\kappa})$. Assim, para $\kappa \in \mathcal{T}_h$, associamos os valores do grau de aproximação polinomial local p_κ e o índice de Sobolev local s_κ . Coletando p_κ , s_κ e \mathcal{F}_κ em vetores $\mathbf{p} = \{p_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$, $\mathbf{s} = \{s_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ e $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$, podemos definir os seguintes espaços:

$$S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) = \{ \phi \in L_2(\Omega) : \phi|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_{p_\kappa}(\hat{\kappa}) \\ \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \}.$$

e

$$H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{ \phi \in L_2(\Omega) : \phi|_\kappa \in H^{s_\kappa}(\kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \}.$$

O espaço $S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ é o espaço de elementos finitos, e $H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}_h)$ é o espaço de Sobolev particionado (depende da malha).

Seja \mathcal{E}_h o conjunto de todas as faces abertas e de todos os elementos $\kappa \in \mathcal{T}_h$. Sobre este conjunto consideramos a função constante por partes $h_{\mathcal{E}_h}$ definida por

$$h_{\mathcal{E}_h}(x) = h_e = \text{diam}(e), \quad x \in e, \quad e \in \mathcal{E}_h.$$

O conjunto \mathcal{E}_h será dividido em dois subconjuntos, \mathcal{E}_h° e \mathcal{E}_h^∂ , definidos por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h^\circ &= \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Omega\} \\ \mathcal{E}_h^\partial &= \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \partial\Omega\}.\end{aligned}$$

Além disso, designamos

$$\Gamma^\circ = \{x \in \Omega : x \in e \text{ para } e \in \mathcal{E}_h^\circ\}$$

e, $\Gamma = \Gamma^\circ \cup \partial\Omega$.

Para qualquer face $e \in \mathcal{E}_h^\circ$ há dois elementos κ_i e κ_j ($i > j$), tais que, $\overline{\kappa_i} \cap \overline{\kappa_j} = \bar{e}$. Então, para qualquer m inteiro,

$$\{p^m\}_{\mathcal{E}_h}(x) = \{p^m\}_e = \begin{cases} \frac{p_{\kappa_i}^m + p_{\kappa_j}^m}{2}, & \text{se } e \in \mathcal{E}_h^\circ \\ p_{\kappa_i}^m, & \text{se } e \in \mathcal{E}_h^\partial \end{cases},$$

e para qualquer função $\phi \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 1/2$, definimos a média e o salto (dependem da numeração dos elementos) de ϕ sobre e por

$$\begin{aligned}\{\phi\} &= \begin{cases} \frac{1}{2} (\phi|_{\kappa_i})|_e + \frac{1}{2} (\phi|_{\kappa_j})|_e, & \text{se } e \in \mathcal{E}_h^\circ \\ \phi|_e, & \text{se } e \in \mathcal{E}_h^\partial \end{cases} \\ [\phi] &= \begin{cases} (\phi|_{\kappa_i})|_e - (\phi|_{\kappa_j})|_e, & \text{se } e \in \mathcal{E}_h^\circ \\ \phi|_e, & \text{se } e \in \mathcal{E}_h^\partial \end{cases}.\end{aligned}$$

Além disso, para cada face $e \in \mathcal{E}_h^\circ$, associamos o vetor normal unitário $\nu = \mathbf{n}_{\kappa_i}$ para e , que aponta de κ_i para κ_j , e para cada face $e \in \mathcal{E}_h^\partial$, associamos o vetor normal unitário exterior $\nu = \mathbf{n}_\kappa$ em que $e \subset \partial\kappa$.

2 Problema Modelo e Formulação do DGFEM

Consideramos o seguinte problema modelo: encontre $\psi \in H^4(\Omega)$, tal que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Re} \Delta^2 \psi - B(\psi) &= f \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1) \\ \psi &= g_0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \psi &= g_1 \quad \text{sobre } \partial\Omega,\end{aligned}$$

em que,

$$B(\psi) = \partial_x (\partial_y \psi \Delta \psi) - \partial_y (\partial_x \psi \Delta \psi)$$

$f \in L_2(\Omega)$.

A essa equação diferencial parcial, associamos a forma $B_{DG}(\cdot, \cdot)$ definida abaixo que é obtida da combinação da forma bilinear apresentada em [5, 4] para a equação biarmônica, com a apresentada em [1] para equações hiperbólicas de primeira ordem. Observamos que nesta última forma bilinear foram feitas modificações nos termos sobre as interfaces dos elementos.

$$B_{DG}(\psi, \phi) = B_{bi}(\psi, \phi) + B_{ad}(\psi, \phi),$$

sendo que,

$$B_{bi}(\psi, \phi) = B_\Delta(\psi, \phi) + B_s(\psi, \phi),$$

em que,

$$\begin{aligned}B_\Delta(\psi, \phi) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\Delta \psi, \Delta \phi)_{L_2(\kappa)} \\ &\quad + \langle \{\nu \cdot \nabla (\Delta \psi)\}, [\phi] \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ &\quad + \lambda_1 \langle [\psi], \{\nu \cdot \nabla (\Delta \phi)\} \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \{\Delta \psi\}, [\nu \cdot \nabla \phi] \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ &\quad - \lambda_2 \langle [\nu \cdot \nabla \psi], \{\Delta \phi\} \rangle_{L_2(\Gamma)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_s(\psi, \phi) &= \langle \alpha [\psi], [\phi] \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ &\quad + \langle \beta [\nu \cdot \nabla \psi], [\nu \cdot \nabla \phi] \rangle_{L_2(\Gamma)},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}B_{ad}(\psi, \phi) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\Delta \psi, (\mathbf{b} \cdot \nabla \phi))_{L_2(\kappa)} \\ &\quad - \langle \{(\mathbf{b} \cdot \nu) \Delta \psi\}, [\phi] \rangle_{L_2(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \theta [|\mathbf{b} \cdot \nu| \Delta \psi], [\phi] \rangle_{L_2(\Gamma^\circ)},\end{aligned}$$

com $\mathbf{b} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$.

Nestas formas, θ é uma constante positiva que quando assume o valor 0.5 corresponde ao fluxo numérico “upwind”, λ_1 e $\lambda_2 \in [-1, 1]$ são responsáveis por assegurar algumas propriedades desejáveis da forma bilinear $B_{bi}(\cdot, \cdot)$, tais como, simetria e positividade, e as funções α e β introduzidas no termo de estabilização $\mathcal{B}_s(\cdot, \cdot)$, são conhecidas como parâmetros de penalização descontínuas e são definidas por,

$$\alpha|_e = \sigma_\alpha \frac{\{p^6\}_e}{h_e^3}, \quad \beta|_e = \sigma_\beta \frac{\{p^2\}_e}{h_e}, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h,$$

onde σ_α e σ_β , serão definidos posteriormente.

O funcional linear associado ao problema de valor de fronteira (1) é:

$$l(\phi) = l_\Delta(\phi) + l_s(\phi)$$

em que $l_\Delta(\cdot)$ está relacionado com o lado direito e com as condições de fronteira do problema e $l_s(\cdot)$ está relacionado com a parte de estabilização da forma

$$\begin{aligned}l_\Delta(\phi) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (f, \phi)_{L_2(\kappa)} \\ &\quad + \lambda_1 \langle g_0, \nu \cdot \nabla (\Delta \phi) \rangle_{L_2(\partial\Omega)} \\ &\quad - \lambda_2 \langle g_1, \Delta \phi \rangle_{L_2(\partial\Omega)}, \\ l_s(\phi) &= \langle \alpha g_0, \phi \rangle_{L_2(\partial\Omega)} + \langle \beta g_1, \nu \cdot \nabla \phi \rangle_{L_2(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

Desse modo, a formulação fraca descontínua geral para o problema modelo (1) é: encontre $\psi \in H^4(\Omega, \mathcal{T}_h)$, tal que,

$$\mathcal{B}_{DG}(\psi, \phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in H^4(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (2)$$

E, a versão hp do DGFEM com penalização interior associado a formulação (2) é: encontre $\psi_{DG} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$, tal que,

$$\mathcal{B}_{DG}(\psi_{DG}, \phi) = l(\phi) \quad \forall \phi \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}).$$

De maneira a assegurar que a forma bilinear $\mathcal{B}_{DG}(\cdot, \cdot)$ seja significativa, assumimos que $p_\kappa \geq 3 \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h$.

3 Resultados Numéricos

Apresentamos nesta sessão os resultados obtidos com o método de Galerkin descontínuo aplicado ao problema de teste do fluxo “backward-facing step”, que é usualmente usado na literatura com um teste de validação. E, objetivando comparar os resultados obtidos com os apresentados em [3], resolvemos este problema para $Re = 800$.

Observamos que todos os resultados numéricos foram obtidos usando o ambiente de programação orientado a objetos PZ. Para mais detalhes veja [2].

Na Figura 1, apresentamos a geometria e as condições de contorno superiores e inferiores do problema. Para a região de “inflow”, as condições de contorno são

$$u(y) = \begin{cases} -24y^2 + 12y, & \text{se } 0 \leq y \leq 0.5 \\ 0, & \text{se } -0.5 \leq y < 0 \end{cases}$$

$$v = 0,$$

enquanto que para a região de “outflow” temos:

$$u(y) = -3y^2 + 3/4$$

$$v = 0.$$

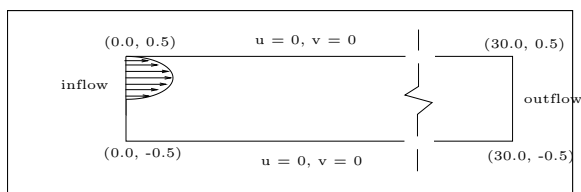


Figura 1: Backward-facing step - geometria

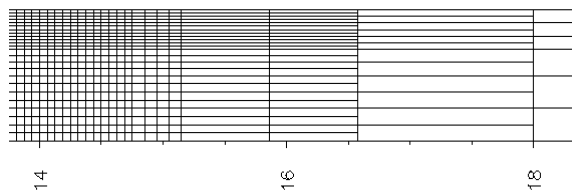


Figura 2: Detalhe da malha

Para construir o espaço de elementos finitos $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$, usamos para aproximação polinomial $p_\kappa = 3 \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h$. Os demais parâmetros envolvidos na formulação foram: $\theta = 0.5$ (resultando no fluxo

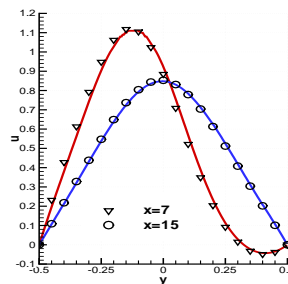


Figura 3: Perfil da velocidade horizontal em $x = 7$ e $x = 15$

numérico “upwind”), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (garantem que a forma bilinear $B_{bi}(\psi, \phi)$ seja simétrica) e $\sigma_\alpha = 100$, $\sigma_\beta = 1000$.

A abordagem usada para resolver a não linearidade da equação diferencial foi o método de Newton-Raphson, o qual iterava enquanto a norma do vetor de incremento da solução fosse maior que $1e - 7$. Para alcançar o $Re = 800$, foi necessário resolver este problema para alguns Reynolds menores, afim de usar a solução destes como aproximação inicial no método de Newton-Raphson. A saber, foi resolvido para a seguinte seqüência de Reynolds: 200, 400, 600, 700 e 800. Para $Re = 200$ usamos aproximação inicial nula. O número de iterações necessárias para obter a tolerância mencionada para cada número de Reynolds foi: 9, 7, 11, 8 e 8, respectivamente.

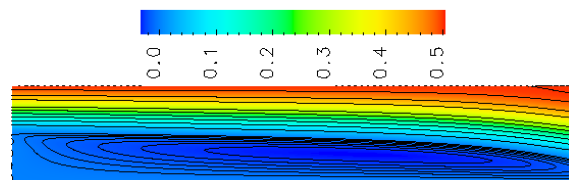


Figura 4: Linhas de contorno da função corrente

Na construção da malha para este exemplo o domínio computacional foi dividido em duas regiões, uma para $x < 15$ e outra no caso contrário. Uma malha inicial foi gerada de modo que na primeira região ela era uniforme na direção x e não uniforme na direção y , enquanto que para a segunda região, a malha era não uniforme nas duas direções coordenadas. O número de elementos destas duas regiões foi, 60×6 e 4×6 , respectivamente. Por fim, a primeira região desta malha inicial sofreu dois níveis de refinamento uniforme, isto é, para cada nível de refinamento, cada elemento é dividido em quatro, conectando os pontos médios de seus lados. A malha final na região de fronteira entre essas duas regiões é apresentada na Figura 2.

Conforme apresentado na Figura 3, onde plotamos o perfil da componente de velocidade u em $x = 7$ e $x = 15$, pode-se observar uma boa concordância dos resultados obtidos com a formulação

de Galerkin descontínuo com os obtidos por [3]. Por último, nas Figuras 4 e 5 plotamos as linhas de contorno da função de corrente para este problema na região inicial do domínio computacional.

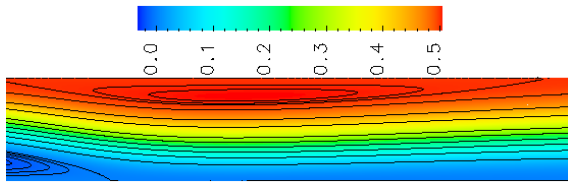


Figura 5: Linhas de contorno da função corrente (continuação)

Referências

- [1] F. Brezzi, L. Marini, and E. Süli. Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. Technical Report 04/02, Oxford University Computing Laboratory, 2004.
- [2] P. R. B. Devloo. PZ: An object oriented environment for scientific programming. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 150:133–153, 1997.
- [3] D.K. Gartling, A test problem for outflow boundary conditions - flow over a backward-facing step, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 11 (1990) 953-967.
- [4] I. Mozolevski and E. Süli. A priori error analysis for the hp-version of the discontinuous Galerkin finite element method for the biharmonic equation. *Comput. Meth. Appl. Math.*, 3(4):596–607, 2003.
- [5] E. Süli and I. Mozolevski. hp-version interior penalty DGFEMs for the biharmonic equation. Technical Report 04/05, Oxford University Computing Laboratory, 2004.