

Instabilidade de Colunas em Contato Parcial com uma Base Elástica

Gustavo Serebrenick

E-mail: gustavos@rdc.puc-rio.br

Paulo Batista Gonçalves

Depto de Engenharia Civil, PUC-Rio

Rua Marquês de São Vicente, 225

22453-900, Rio de Janeiro, RJ

E-mail: paulo@civ.puc-rio.br

Introdução

A análise do comportamento de colunas enterradas em fundação elástica tem atraído a atenção de pesquisadores por um longo período de tempo. Isso se deve principalmente à sua grande aplicação prática em problemas reais do dia-a-dia em Engenharia Estrutural. Pode-se citar, por exemplo, pilares esbeltos em edifícios industriais, pontes e estruturas off-shore, estacas de fundação de edifícios, dentre muitas outras aplicações nessa área.

Problemas como o de uma coluna totalmente enterrada, ou totalmente desenterrada, foram amplamente estudados e suas soluções são encontradas em livros clássicos de estabilidade.

Entretanto, o problema deste trabalho está relacionado com colunas parcialmente enterradas (contato parcial), o qual constitui-se em um problema matemático complexo e que envolve um sistema matricial de dimensão oito, no qual expressões extensas e complexas são manipuladas.

Na Engenharia, todo projeto de elementos esbeltos deve satisfazer critérios bem definidos que garantam a segurança da estrutura através da sua resistência aos esforços atuantes e do impedimento de deformações e vibrações excessivas. Daí a importância de se conhecer o comportamento detalhado de colunas com respeito à sua estabilidade, evitando-se, desta forma, que as mesmas sejam submetidas a cargas e deformações que possam vir a comprometer a sua utilização como elemento de sustentação.

Objetivo

Conforme mencionado, o presente trabalho tem por objetivo estudar a estabilidade de colunas esbeltas parcialmente enterradas, a partir da análise dos resultados obtidos para suas cargas críticas, modos críticos, caminhos pós-críticos e diagramas de esforço cortante e momento fletor.

O problema em questão constitui-se em uma coluna, que possui um trecho de seu comprimento enterrado sob fundação elástica, sujeita à carregamento axial de compressão em ambas as extremidades, conforme ilustrado na Figura 1.

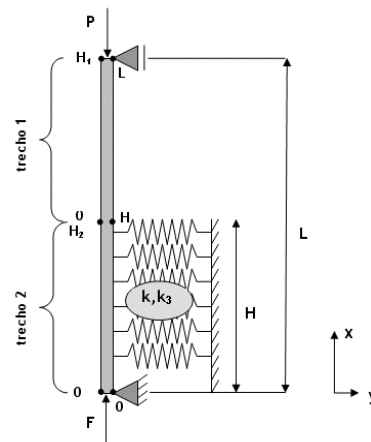


Figura 1: Representação do problema estudado.

Na Figura 1, L é o comprimento total da coluna, H , a altura da fundação, P , a carga axial de compressão aplicada no topo da coluna, F , a força de reação exercida pela fundação e k e k_3 , constantes de rigidez linear e não-linear da fundação, respectivamente.

A coluna é subdividida em dois trechos. O primeiro, superior, sem fundação, denominado trecho 1, e o segundo, trecho 2.

Formulação do Problema

Segundo (Dym e Shames, 1973), tem-se que a energia potencial total de uma estrutura, denominada π , é dada pela soma da energia interna de deformação (U), com o potencial das cargas externas (V_p), e é definida pelo seguinte funcional:

$$\pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx - \int_0^L \frac{1}{2} P \left(w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) dx \quad (1)$$

A fim de se descrever o comportamento da fundação elástica, diversos modelos podem ser utilizados.

Em função de sua simplicidade, combinado com um histórico de bons resultados obtidos em trabalhos anteriores, o modelo de fundação elástica de Winkler é o mais usado na prática e será o modelo adotado para descrever o comportamento da fundação também neste trabalho.

Segundo Coskun (1999), este modelo caracteriza-

se como uma distribuição infinita, porém contínua, de molas lineares, no qual a fundação aplica somente uma única reação na direção normal à coluna e que é proporcional a deflexão desta. Dessa forma, a resistência da fundação pode ser expressa através de um único parâmetro de rigidez, denominado por k .

A energia interna de deformação da fundação elástica (U_{fd}), segundo o modelo de Winkler linear, é dada por:

$$U_{fd} = \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx \quad (2)$$

e segundo o modelo de Winkler Não-Linear com perda de rigidez, por:

$$U_{fd} = \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx - \int_0^H \frac{1}{2} k_3 w^4 dx \quad (3)$$

Sendo assim, o funcional completo de energia não-linear, obtido a partir da soma das Equações (1) com (3), é dado por:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx \\ & - \int_0^L \frac{1}{2} P \left(w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) dx + \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx - \int_0^H \frac{1}{2} k_3 w^4 dx \end{aligned} \quad (4)$$

A fim de se obter o funcional de energia linear, parte-se da consideração de que a coluna sofre pequenas rotações após a sua deformação. Com isso, tem-se que o ângulo ψ , visto na Figura 2, é muito pequeno.

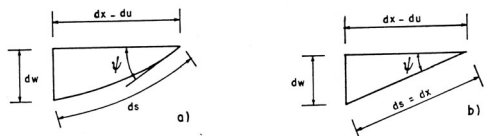


Figura 2: Elemento infinitesimal deformado.

Em consequência dessa aproximação, o funcional completo de energia linear, usado apenas para pequenas rotações, pode ser descrito pela equação simplificada:

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI (w_{,xx}^2) - \frac{1}{2} P (w_{,x}^2) \right] dx + \int_0^H \frac{1}{2} k w^2 dx \quad (5)$$

As equações diferenciais da coluna são obtidas a partir do funcional de energia (5), sendo determinadas ao aplicarem-se as ferramentas do Cálculo Variacional. Vários autores já resolveram este problema, como, por exemplo, Chajes (1993) e Dym e Shames (1973).

Ao se introduzirem parâmetros adimensionais, faz-se com que o desenvolvimento do problema seja facilitado, permitindo assim uma maior eficiência na análise paramétrica.

Dessa forma, as equações diferenciais da coluna, em função destes parâmetros são dadas pelas expressões a seguir.

Trecho sem fundação:

$$\left(\frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} \right) + \lambda^2 \pi^2 \left(\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (6)$$

Trecho com fundação:

$$\left(\frac{d^4 w_2(x)}{dx^4} \right) + \lambda^2 \pi^2 \left(\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right) + K w_2(x) = 0 \quad (7)$$

Onde λ corresponde ao parâmetro de carga, K , ao parâmetro de rigidez da fundação elástica e $w_1(x)$ e $w_2(x)$ às funções que definem os deslocamentos transversais ao longo dos trechos 1 e 2 da coluna, respectivamente.

Após definidas as equações diferenciais da coluna, em seus trechos sem e com fundação, e juntamente com as condições de contorno e de continuidade do problema, pretende-se obter a sua solução analítica.

Por se tratar de um problema de valor de contorno, sua solução analítica corresponde a uma família de autovalores e autofunções que são, respectivamente, as cargas de bifurcação e os respectivos modos de bifurcação, também chamados de cargas críticas e modos críticos.

Como mostrado por Boyce e Di Prima (1998), a solução geral de uma equação diferencial linear de quarta ordem, com coeficientes constantes é uma expressão da seguinte forma:

$$w_i(x) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\alpha_i x} \quad (8)$$

onde C_i são as constantes da solução geral, e α_i as raízes da equação característica.

A solução geral de cada trecho é dada em função dessas constantes e raízes.

Obtendo-se as raízes das equações características, chega-se às soluções de ambos os trechos, dadas pelas expressões a seguir:

Trecho sem fundação:

$$w_1(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin(\lambda \pi x) + C_4 \cos(\lambda \pi x) \quad (9)$$

Trecho com fundação:

$$\begin{aligned} w_2(x) = & C_5 e^{(1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}}) x} \\ & + C_6 e^{(1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}}) x} \\ & + C_7 e^{(-1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 + 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}}) x} \\ & + C_8 e^{(-1/2 \sqrt{-2\lambda^2 \pi^2 - 2\sqrt{\lambda^4 \pi^4 - 4K}}) x} \end{aligned} \quad (10)$$

Uma análise mais detalhada dessas raízes, mostra que, dependendo da relação entre os valores de λ e K , as mesmas podem vir a ser reais ou imaginárias e que podem ser escritas soluções simplificadas para cada um desses casos, conforme feito por Serebrenick (2004).

Como pode ser observado, as soluções das equações diferenciais para cada trecho da coluna são dadas em função de oito constantes.

A fim de se obter os valores numéricos destas

constantes, é preciso que se tenham também oito equações, as quais são fornecidas a partir das condições de contorno e de continuidade do problema.

Após definidas essas oito equações, tem-se então um sistema homogêneo composto por oito equações e oito incógnitas que pode ser escrito na forma matricial:

$$Ac = 0 \quad (11)$$

onde A é denominada matriz dos coeficientes e c , vetor das constantes.

A solução trivial desse sistema fornece:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0 \quad (12)$$

o que corresponde à coluna na sua posição vertical, sem deformações transversais.

Para que um sistema homogêneo de equações possua solução não-trivial é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero. Ao se igualar o determinante da matriz A à zero, obtém-se uma equação em função do parâmetro de carga λ , denominada equação característica do problema de autovalor, isto é:

$$\det A = 0 \quad (13)$$

As raízes dessa equação são as cargas críticas da coluna e a melhor forma de se obter esses valores é através da análise do gráfico da equação característica. Nesse gráfico, no eixo das ordenadas são plotados os valores do determinante, e, no eixo das abscissas, os valores do parâmetro de carga λ . As cargas críticas correspondem aos valores de λ quando a curva corta o eixo das abscissas.

Para a obtenção precisa desses pontos é importante fazer uma cuidadosa análise numérica nos intervalos próximos aos pontos onde a curva muda de sinal. Em uma simples rotina computacional, define-se um pequeno intervalo no qual o seu limite inferior é um valor de λ antes da mudança de sinal da curva, e o limite superior, um ponto posterior a esta mudança. Calcula-se então o valor do determinante para cada um dos pontos deste intervalo, repetindo-se esse mesmo procedimento até que se obtenha um valor do determinante na ordem de grandeza de 10^{-5} , que pode ser considerada uma boa aproximação da solução exata.

Em todo problema de estabilidade, a estrutura analisada possui diversas cargas críticas, sendo que aquela com o menor valor numérico dentre elas é denominada primeira carga crítica ou carga de flambagem. Fisicamente analisando, essa carga representa um valor numérico para o qual a estrutura perde sua estabilidade.

As cargas críticas são os autovalores da matriz A , assim como os seus autovetores estão associados aos modos críticos (também chamados modos de flambagem). A cada autovalor está

associado um autovetor, ou seja, a cada carga crítica está associado certo modo de flambagem da coluna.

Para se determinar os autovetores, arbitra-se uma das constantes multiplicativas e obtém-se a solução do sistema (11).

Os gráficos obtidos são apresentados de tal forma que as amplitudes máximas dos modos críticos sejam sempre unitárias, facilitando-se, assim, a observação dos resultados.

Solução Aproximada de Rayleigh-Ritz

Com o objetivo de se analisar a qualidade do programa desenvolvido, é determinada, também, uma solução aproximada para o problema

O método adotado para esta comparação foi o Método de Rayleigh-Ritz (ou apenas Método de Ritz), o qual se apresenta como uma boa ferramenta na análise linear quando deseja-se estudar sistemas que apresentem equações ou condições de contorno complexas.

Através do método de Ritz substitui-se a solução analítica por uma função de aproximação, f_n , no funcional de energia da coluna. Essa função de aproximação é usualmente expressa na forma de séries, de acordo com a expressão:

$$f_n = \sum_{j=1}^n A_j \phi_j \quad (14)$$

Onde A_j são constantes que multiplicam as funções ϕ_j adotadas, e n é o número de termos usados na série.

A quantidade de termos empregados nesta função é determinante na precisão da solução do problema.

Definida a função de aproximação, ϕ_j , com o seu respectivo número de termos, substitui-se a mesma no funcional de energia linear. Integrando-se esse funcional ao longo do comprimento da coluna, obtém-se uma função, π_{approx} , das amplitudes modais A_j .

Empregando-se então o princípio da energia potencial estacionária obtém-se as n equações de equilíbrio, definidas pelas equações:

$$\frac{\partial \pi_{approx}}{\partial A_j} = 0 \quad j = 1, n \quad (15)$$

Assim, chega-se a um sistema com n equações e n incógnitas (A_j), cuja resolução segue o mesmo raciocínio adotado no problema para a determinação das cargas críticas a partir da solução analítica.

Resultados da Análise Linear

A partir do programa desenvolvido em MAPLE é possível verificar a influência nas cargas críticas e modos críticos ao serem variados alguns parâmetros físicos do problema. As figuras apresentadas a seguir representam os resultados finais para cada caso.

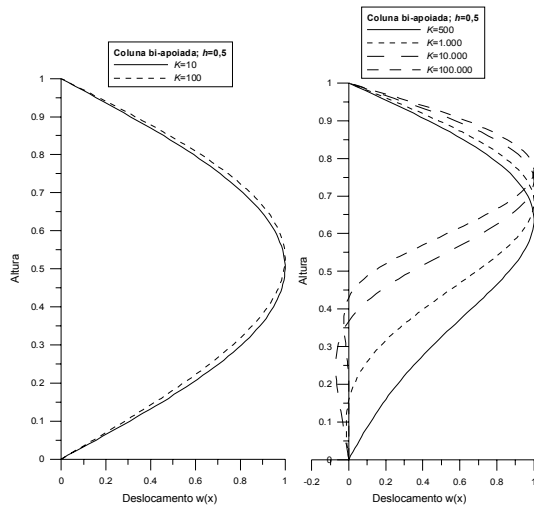


Figura 3: Influência da rigidez da fundação (K) nos modos críticos.

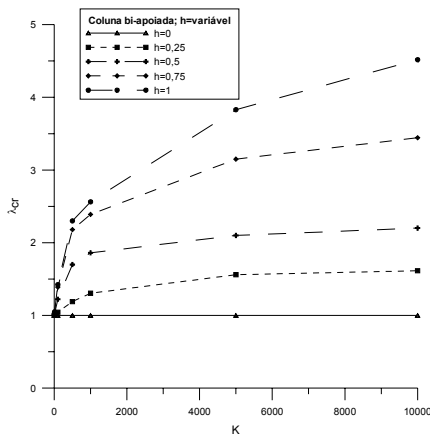


Figura 4: Influência da altura da fundação (h) nos valores obtidos para as cargas críticas (λ_{cr}).

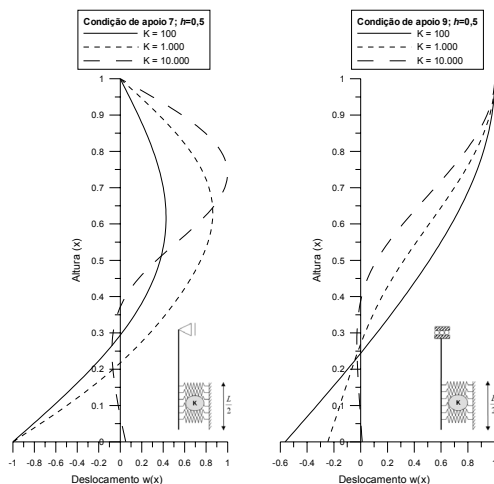


Figura 5: Influência da rigidez da fundação nos modos críticos de colunas com diferentes condições de contorno.

As cargas críticas da coluna também foram calculadas através da solução aproximada, na qual se utilizou o Método de Ritz.

Neste método foram testadas funções de

aproximação com um à oito termos. Sabe-se que uma boa função de aproximação é aquela que atende à todas as condições de contorno do problema, fazendo com que sua convergência para o resultado final seja muito mais rápida.

A análise dos resultados ao utilizar-se o Método de Ritz permitiu a obtenção das seguintes conclusões:

1^a) A medida em que se utiliza um número maior de termos nas funções de aproximação, diminui-se o erro cometido em relação às cargas críticas calculadas através da solução analítica.

2^a) Independentemente do número de termos utilizados nas funções de aproximação, o erro cometido aumenta a medida em que se aumenta o valor de K ;

3^a) Ao se utilizar as funções de aproximação com um e dois termos, deve-se tomar bastante cuidado, já que os erros cometidos podem ser bastante elevados.

Formulação do Problema Não-Linear

As equações diferenciais não-lineares são equações muito complexas e que não possuem soluções analíticas. Dessa forma, se faz necessário encontrar outros métodos que tornem possível a resolução do problema não-linear.

Novamente o método aproximado escolhido é o de Ritz, onde as funções de interpolação são exatamente as autofunções obtidas analítica no problema linear, já que todas elas atendem às condições de contorno e de continuidade. Em virtude dessa escolha, um único termo da série (14) já é suficiente para se obter uma solução precisa do caminho pós-crítico na vizinhança do ponto crítico. Vale mencionar que essa escolha foi motivada pelos bons resultados obtidos, combinados com sua simplicidade de implementação computacional.

Neste método, no final do processo chega-se a uma equação polinomial de equilíbrio não-linear, dada pela expressão a seguir:

$$N_1\eta + N_2\eta^3 + N_3\eta^5 - N_4\eta\lambda^2 - N_5\eta^3\lambda^2 = 0 \quad (16)$$

onde N_1 , N_2 , N_3 , N_4 e N_5 são valores numéricos que multiplicam cada parcela desta equação, e η , o deslocamento transversal máximo na coluna.

A solução desse polinômio é uma expressão na qual λ é dado em função de η , na forma

$$\lambda = g(\eta) \quad (17)$$

Finalmente, ao se plotar esta equação, tem-se o gráfico do caminho pós-crítico da coluna.

Cabe ressaltar que o processo detalhado do Método de Ritz no problema não-linear é mostrado no trabalho que originou este artigo, desenvolvido por Serebrenick (2004).

Resultados da Análise Não-Linear

Os principais resultados da análise não-linear são os caminho pós-críticos, ou seja, uma forma gráfica de se entender como a coluna se comporta a partir do momento em que perde sua estabilidade.

Os resultados apresentados a seguir foram extraídos de um outro programa, também desenvolvido em MAPLE, e baseado na formulação do problema não-linear apresentada no item anterior.

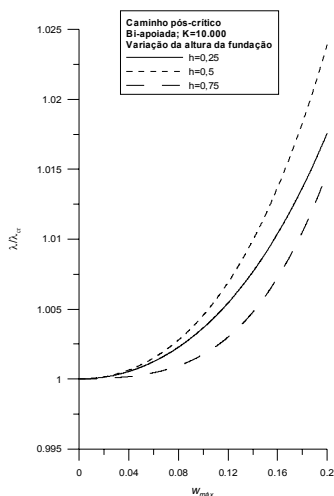


Figura 6: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação com $K=10.000$, em função da altura h .

Verificou-se também a influência da não-linearidade da fundação no caminho pós-crítico, sendo adotado, neste caso, o Modelo Não-Linear de Winkler. Esse modelo é muito utilizado para representar a maioria dos solos usualmente encontrados na natureza, pois considera que ocorre perda de rigidez à medida que se aumentam as forças exercidas pela estrutura sobre o solo (Greimann, et al., 1987). Nesse caso, diferentemente de em um modelo linear, a reação exercida pelo solo não é proporcional às deflexões da coluna.

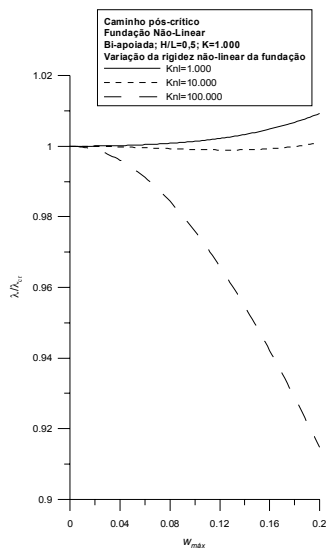


Figura 7: Variação do caminho pós-crítico de uma coluna bi-apoiada, com fundação até a metade de seu comprimento e $K=1.000$, em função de diversos valores adotados para K_{nl} .

A título de comparação dos resultados obtidos

para o comportamento inicial do caminho pós-crítico, também analisou-se a coluna a partir de um programa computacional baseado no Método dos Elementos Finitos, desenvolvido por Silveira (1995).

Esta comparação é de grande importância, pois o caminho pós-crítico corresponde a um resultado que só é obtido no final do processo de cálculo realizado pelo programa desenvolvido.

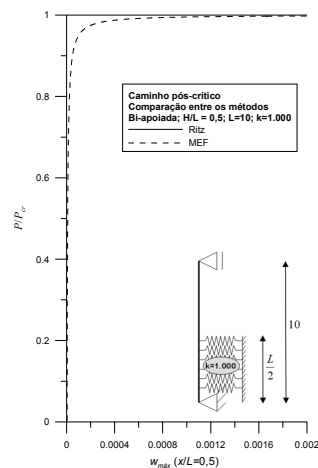


Figura 8: Caminhos pós-críticos obtidos pelos dois métodos, para a situação da coluna mostrada no detalhe.

Os diagramas de momento fletor e esforço cortante do problema não-linear são obtidos utilizando-se as expressões a seguir:

$$M = EIw_{,xx} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \right\} \quad (18)$$

$$Q = EIw_{,xxx} \left[1 + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \right] + EI(w_{,xx})^2(w_{,x}) \quad (19)$$

Já foi visto anteriormente que no problema não-linear o caminho pós-crítico é representado por uma curva que varia na medida em que a coluna se deforma.

De modo a se construir os diagramas, são tomados dois pontos deste processo de deformação, anotando-se os deslocamentos transversais máximos e seus respectivos valores de carga correspondentes.

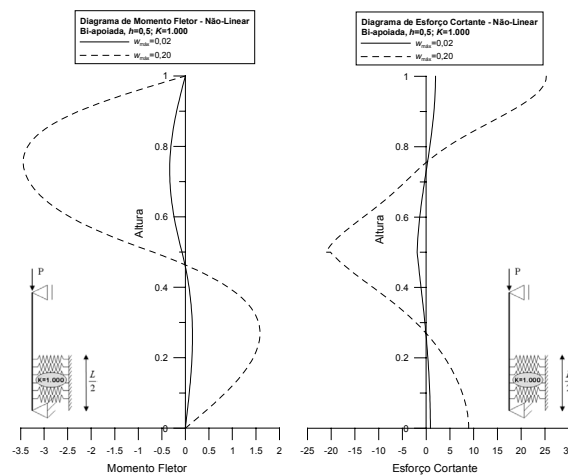


Figura 9: Diagramas de momento fletor e esforço cortante não-linear.

Conclusões

No presente trabalho é analisada a estabilidade de colunas, e tem como principal objetivo de pesquisa apresentar uma solução analítica para o problema de colunas semi-enterradas. Essa solução é obtida usando-se as ferramentas de cálculo variacional e a teoria de equações diferenciais ordinárias, juntamente com programas de álgebra simbólica (MAPLE).

Na análise problema linear, recai-se em um problema de autovalor, do qual busca-se obter sua solução não-trivial a partir das raízes da equação do determinante característico, que são as cargas críticas do problema. Entretanto, esta equação é bastante extensa e complexa, com a presença de diversos termos não-lineares envolvendo funções exponenciais e trigonométricas e que apresenta grande sensibilidade numérica. Sua solução é encontrada através de uma cuidadosa análise numérica, observando-se graficamente os pontos onde a curva troca de sinal para, a seguir, usando o método de regula-falsi, obter os zeros da equação com a precisão desejada. Os modos críticos são determinados a partir dos valores obtidos para as cargas críticas, e correspondem à solução analítica deste problema.

É importante ressaltar que a solução analítica do problema estudado se tornou possível em virtude dos programas de álgebra simbólica hoje disponíveis que permitem a manipulação algébrica de expressões complexas. Basta lembrar que o determinante característico de ordem 8 gera 8! termos, isto é, 8.064 parcelas não-lineares.

Nos resultados obtidos na análise linear, verificou-se a influência da rigidez e altura da fundação elástica linear no comportamento da coluna, comprovando-se que estes fatores estão diretamente relacionados à rigidez da estrutura como um todo. Mostrou-se que, quanto maiores forem os valores destes parâmetros, maiores serão as cargas críticas da coluna, bem como menores serão as variações das deformações ao longo da coluna, as quais tendem a atingir os seus valores máximos no trecho desenterrado, em posições próximas ao topo da coluna.

Foi verificado, também, que a coluna totalmente enterrada e a coluna totalmente desenterrada, possuem exatamente a mesma deformada, independente de qualquer fator.

A influência das condições de apoio também foi verificada, observando que as mesmas têm grande influência no valor da carga crítica e nos modos críticos.

Já na análise não-linear, onde as equações diferenciais são complexas de tal forma que não possuem solução analítica, faz-se necessária a utilização de métodos aproximados para que se obtenha a solução deste tipo de problema. Para isso, foi adotado o método de Ritz, o qual, com base nos resultados obtidos, provou ser bastante

eficiente. Nesse método usou-se como funções de interpolação as autofunções obtidas do problema de autovalor que atendem todas as condições de contorno e continuidade. Isso possibilitou se obter, com apenas um modo, uma aproximação de qualidade para o caminho pós-crítico na vizinhança do ponto de bifurcação.

Nesta etapa do trabalho, estudou-se o comportamento pós-crítico da coluna, sendo o seu trecho inicial comparado com resultados obtidos através do método dos elementos finitos.

Nos resultados obtidos verificou-se que não existe uma relação direta entre a rigidez e a altura da fundação na rigidez pós-flambagem da coluna, o que ocorre devido à variação da energia associada a cada modo crítico.

Referências

- [1] ANDRADE, E. Q., 1993. Instabilidade e Vibrações de Colunas Esbeltas sobre Base Elástica. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- [2] BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L., 1991. Stability of Structures. Elastic-Inelastic Fracture and Damage Theories. New York: Oxford University Press.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., 1998, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Editora Guanabara, 6ª. ed.
- [4] CHAJES, A., 1993. Principles of Structural Stability Theory. Waveland Press, Inc., pp. 88-93.
- [5] DYM, C. L.; SHAMES, I. H., 1973. Solid Mechanics – A Variational Approach. McGraw-Hill – Kogakusha, Ltd, Tokyo.
- [6] GREIMANN, L. F.; WOLDE-TINSAE, A. M.; YANG, P. S., 1987. Finite Element Model for Soil-pile Interaction in Integral Abutment Bridges. Computers and Geotechnics, Vol. 4, pp. 127-149.
- [7] SAMPAIO, A. E. G., 2004. Análise do Comportamento Dinâmico de Colunas Semi-Enterradas. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- [8] SEREBRENICK, G., 2004. Análise da Estabilidade de Colunas Esbeltas Parcialmente Enterradas em uma Fundação Elástica Não-Linear. Dissertação de Mestrado – PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- [9] SILVEIRA, R. A. M., 1995. Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato. Tese de Doutorado – PUC-Rio, Rio de Janeiro.