

Vibrações de Estacas Parcialmente Enterradas em uma Base Elástica

Antonio Eduardo G. Sampaio

E-mail: aesampaio@hotmail.com

Paulo Batista Gonçalves

Depto de Engenharia Civil, PUC-Rio

Rua Marquês de São Vicente, 225

22453-900, Rio de Janeiro, RJ

E-mail: paulo@civ.puc-rio.br

Introdução

A ampla aplicação das vigas repousando sobre uma fundação elástica na modelagem de alguns problemas de engenharia tem sido um grande incentivo para o desenvolvimento de estudos sobre os fenômenos oscilatórios envolvendo estes elementos. A análise dinâmica linear, neste trabalho, tem como objetivo a obtenção de uma solução analítica para as frequências naturais e modos de vibração de colunas semi-enterradas, partindo de um funcional de energia e da dedução das equações diferenciais parciais de movimento em função de parâmetros adimensionais característicos do problema. A introdução da não-linearidade originária da geometria da estrutura implica na obtenção de equações diferenciais não-lineares, onde as resoluções são obtidas de forma aproximada através do emprego do método de Ritz para discretizar a coluna no espaço, do método de Galerkin-Urabe para resolução da equação diferencial não-linear no domínio do tempo e do método de Newton-Rapson para resolução dos sistemas de equações algébricas não-lineares.

Modelagem Matemática

A equação diferencial de movimento é obtida a partir da função de Lagrange, aplicando o Princípio de Hamilton, o qual, segundo Leipholz (1970), é usado principalmente no estudo de oscilações não lineares. Ressalta-se, que um sistema linear se traduz em uma simplificação de um problema não-linear.

O Princípio de Hamilton estabelece que a variação da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas durante um intervalo de tempo de t_1 para t_2 deve ser igual a zero, ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta [T - (U + V_p)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta (W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

Em (1) define-se T como a energia cinética, $(U+V_p)$ como a energia potencial, sendo U a energia interna de deformação e V_p o potencial das cargas externas, e W_{nc} o trabalho realizado pelas forças não conservativas. A partir da teoria de Euler-Bernoulli, que considera a altura da viga-coluna muito pequena

quando comparada com o comprimento (Dym & Shames, 1973), tem-se que

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

onde ρ é massa por unidade de volume e A é a área da seção transversal;

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (3)$$

onde χ é a mudança de curvatura, E , o módulo de elasticidade e I o momento de inércia da seção;

$$V_p = P \times \Delta \quad (4)$$

com P sendo a carga estática e Δ o encurtamento na extremidade da estrutura, conforme mostra a Figura 1.

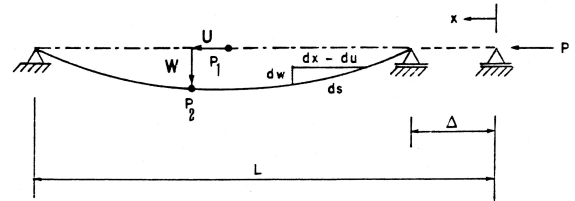


Figura 1: Deslocamento transversal e encurtamento da viga-coluna

Se w representa o deslocamento lateral, tem-se que a variação da curvatura χ e o encurtamento Δ são:

$$\chi = w_{,xx} \left(1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \quad (5)$$

$$\Delta = \int_0^L \left(-\frac{1}{2} w_{,x}^2 - \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (6)$$

O solo envolvendo a estaca é considerado como uma fundação elástica seguindo o modelo de Winkler que define que esta exerce somente uma reação normal à coluna proporcional a sua deflexão. Portanto, a energia interna de deformação da fundação é:

$$U_{fd} = \int_0^H \frac{1}{2} k_0 w^2 dx \quad (7)$$

onde k_0 é um parâmetro de rigidez do solo e H é a profundidade da fundação.

Para simular a dissipação de energia que os sistemas reais exibem, considera-se o trabalho realizado pela força

de amortecimento obtido da expressão:

$$\text{Re} = \int_0^L \frac{1}{2} \beta_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (8)$$

$$\beta_1 = \frac{2\xi M \omega_0}{EI} \quad (9)$$

onde β_1 é um parâmetro de amortecimento e ξ , M e ω_0 representam respectivamente o fator de amortecimento, a massa e a frequência fundamental.

Considera-se que a coluna está submetida a uma carga harmônica axial $P(t)$ de amplitude A_0 , e frequência ω . Logo, tem-se:

$$P(t) = A_0 \text{sen}(\omega t) \quad (10)$$

No funcional introduz-se a força harmônica, ao considerar o trabalho W_p realizado por esta,

$$W_p = \int_0^L P(t) w dx \quad (11)$$

A função de Lagrange é definida, para uma coluna totalmente enterrada em uma fundação elástica com vibração amortecida, pelas equações:

$$L_g = T - (U + V_p) \quad (12)$$

$$L_g = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) \right] dx + \int_0^L \left[P \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) - \frac{1}{2} k_0 w^2 \right] dx \quad (13)$$

A consideração de pequenas rotações e deformações leva à obtenção do funcional linear:

$$L_g = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2} \left(EI w_{,xx}^2 - w_{,x}^2 P + k_0 w^2 \right) dx \quad (14)$$

Objetiva-se agora encontrar a função $w(x,t)$ para os deslocamentos transversais que extremiza o funcional (14). Usando as ferramentas do cálculo variacional juntamente com o Princípio de Hamilton, tem-se a equação diferencial que a função deve satisfazer. Logo,

$$\left[L_{g_w} \delta w + L_{g_w'} \delta w' - \frac{dL_{g_w}}{dx} \delta w \right]_0^L + \quad (15)$$

$$\int_0^L \int_0^L \left[\frac{d}{dt} \left(L_{g_{\dot{w}}} \right) - \left(L_{g_w} - \frac{d}{dx} \left(L_{g_{w'}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(L_{g_{w''}} \right) \right) \right] \delta w dx dt = 0$$

onde se denomina

$$L_{g_w} = \frac{dL_g}{dw}; L_{g_w'} = \frac{dL_g}{dw'}; L_{g_{w''}} = \frac{dL_g}{dw''} \quad (16)$$

O termo entre colchetes na integral contém a equação de Euler-Lagrange do sistema, ou seja, a equação de movimento. Para a obtenção das frequências naturais utiliza-se a separação de variáveis:

$$w(x,t) = w(x)c(t) = w(x)e^{i\omega_0 t} \quad (17)$$

Para o estudo da coluna semi-enterrada, divide-se esta em duas colunas, conforme mostra a Figura 2.

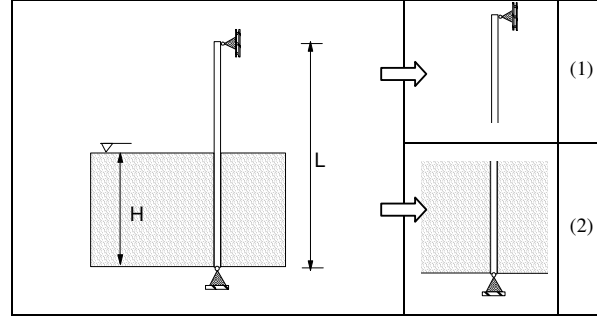


Figura 2: Trechos desenterrado (1) e enterrado (2) da coluna

Substituindo-se a equação (17) na equação de movimento, obtém-se uma equação diferencial linear de quarta ordem em x para cada trecho da coluna, a saber:

$$\left(\frac{\partial^4 w_1(x)}{\partial x^4} \right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{\partial^2 w_1(x)}{\partial x^2} \right) - \frac{\rho A \omega^2}{EI} w_1(x) = 0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w_2(x)}{\partial x^4} \right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{\partial^2 w_2(x)}{\partial x^2} \right) - \frac{\rho A \omega^2}{EI} w_2(x) + \frac{k_0}{EI} w_2(x) = 0 \quad (19)$$

Buscando facilitar o desenvolvimento da análise paramétrica, é realizada uma mudança de variáveis de forma a tornar o problema adimensional. O primeiro passo é a alteração da variável x :

$$x = L\zeta \quad (20)$$

onde x , L e ζ são respectivamente o valor da coordenada longitudinal, o comprimento da coluna e o novo parâmetro adimensional da coordenada axial.

Considerando também os parâmetros adimensionais

$$w = L\bar{w}, \lambda^2 = \frac{PL^2}{\pi^4 EI}, \Omega^4 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{\pi^4 EI}, K = \frac{k_0 L^4}{\pi^4 EI} \quad (21)$$

as equações (18) e (19) podem ser reescritas como

$$\left(\frac{\partial^4 \bar{w}_1(\zeta)}{\partial \zeta^4} \right) + \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_1(\zeta)}{\partial \zeta^2} \right) - \pi^4 \Omega^4 \bar{w}_1(\zeta) = 0 \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial^4 \bar{w}_2(\zeta)}{\partial \zeta^4} \right) + \pi^2 \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_2(\zeta)}{\partial \zeta^2} \right) - \pi^4 \Omega^4 \bar{w}_2(\zeta) + \pi^4 K \bar{w}_2(\zeta) = 0 \quad (24)$$

Uma equação diferencial linear de quarta ordem e coeficientes constantes possui como solução geral:

$$w_i(x) = c e^{\alpha_i x} \quad (22)$$

sendo c uma constante e α_i a raiz da equação característica obtida quando se substitui a expressão acima na equação diferencial. Para a equação (23), tem-se a equação característica

$$\alpha^4 + \lambda^2 \pi^2 \alpha^2 - \Omega^4 \pi^4 = 0 \quad (25)$$

com raízes iguais à

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 4\Omega^4}} \quad (26)$$

$$\alpha_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 4\Omega^4}} \quad (27)$$

e para a equação (24)

$$\alpha^4 + \lambda^2 \pi^2 \alpha^2 + (K - \Omega^4) \pi^4 = 0 \quad (28)$$

com raízes iguais à

$$\alpha_{5,6} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4K + 4\Omega^4}} \quad (29)$$

$$\alpha_{7,8} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 4K + 4\Omega^4}} \quad (30)$$

Com relação às raízes (29) e (30), tem-se que o termo $\lambda^4 - 4K + 4\Omega^4$ pode ser tanto positivo quanto negativo, dependendo dos valores dos diversos parâmetros. Um estudo criterioso das raízes deve ser realizado, para que nos processos que se seguem possam-se eliminar os números imaginários usando-se as transformações de Euler, dando origem assim a funções trigonométricas nas autofunções.

A existência de oito raízes implica no aparecimento de oito constantes, as quais serão determinadas pelas condições de contorno (quatro), que se referem às características dos apoios nas duas extremidade da coluna, e de continuidade (quatro), que se referem a um ponto intermediário, na superfície do solo, comum às duas sub-colunas. Essas condições são relativas à igualdade dos deslocamentos, força cortante, momento e rotação nesse ponto.

Cada condição fornece uma equação homogênea, o que resulta em um sistema de oito equações na forma:

$$Ac = 0 \quad (31)$$

O sistema homogêneo só tem solução não trivial se o determinante da matriz A for igual a zero. Logo, a equação obtida a partir do determinante desta matriz, chamada de equação característica, terá como incógnitas as frequências naturais que são os autovalores da matriz. Os respectivos autovetores são determinados a menos de uma constante arbitrária. Ao se substituir o autovetor nas soluções das equações diferenciais obtém-se as autofunções $\bar{w}(\zeta)$ que são os modos de vibração da coluna. Estas funções são normalizadas de tal forma que a amplitude máxima seja igual a um.

O determinante de A é uma função altamente não-linear do parâmetro de frequência Ω . Além disto, em virtude da presença de funções exponenciais e hiperbólicas, o determinante tem uma variação bastante acentuada, apresentando uma grande sensibilidade numérica. Foi utilizado na análise paramétrica o programa MAPLE de forma que foi possível verificar a influência na estrutura dos diversos parâmetros de carga, rigidez e profundidade da fundação.

Frequências e Modos de Vibração

O de coluna adotado é um perfil de aço em I e os parâmetros de rigidez do solo seguem as considerações de Terzaghi (1955) e Poulos (1980). Maiores detalhes são encontrados em Sampaio (2004).

O programa desenvolvido em MAPLE possibilita verificar a influência, nos valores para as frequências Ω , dos parâmetros de rigidez K da fundação (Figura 3) e de carregamento λ (Figura 4), além da profundidade h (Figura 5). É importante observar que $h=H/L$, $K=2000$ representa uma argila fofa e $K=75000$ uma argila dura.

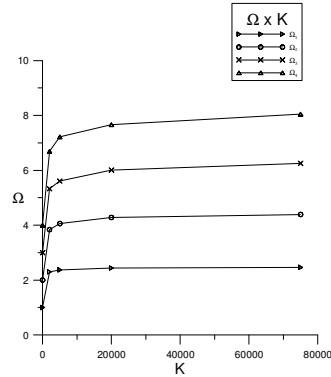


Figura 3: Variação de Ω em função da rigidez K da fundação

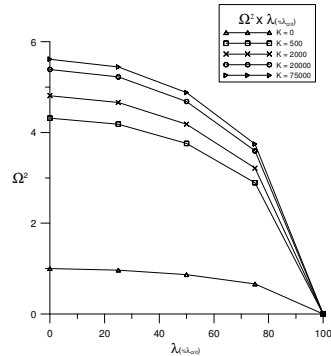


Figura 4: Variação de Ω em função do parâmetro λ de carregamento

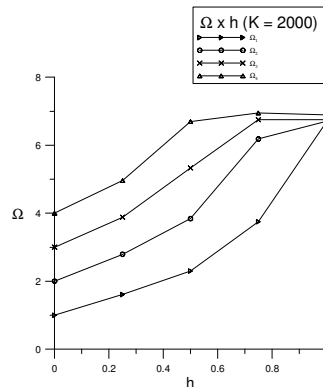


Figura 5: Variação das quatro menores frequências da coluna Ω_i em função da profundidade da fundação normalizada, h .

Os modos de vibração da coluna (autofunções) são obtidos a partir da equação (22). Um exemplo da configuração dos três primeiros modos de uma coluna biapoiada com profundidade $h = \frac{1}{2}$ e $K=2.000$, encontra-se na Figura 6, onde se pode observar a grande influência da fundação nos deslocamentos laterais da coluna.

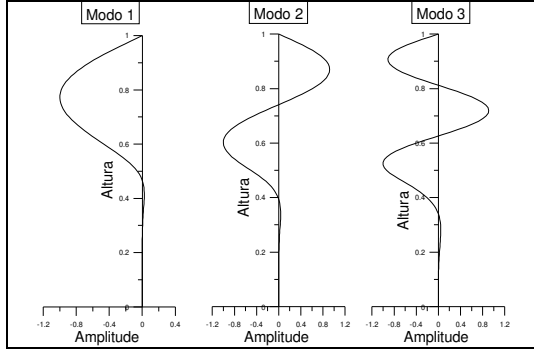


Figura 6: Modos de vibração para a coluna biapoiada

Análise das Vibrações Não-Lineares

A análise não-linear é realizada a partir da função de Lagrange não-linear, equação (13), que gera uma equação diferencial que não possui solução analítica. A metodologia mais indicada, portanto, é obter uma solução aproximada para o problema. Aqui utiliza-se, primeiramente, o método de Ritz para discretizar a coluna no espaço e, a seguir, obtém-se, usando as ferramentas de cálculo variacional, as equações de movimento que, por sua vez, são resolvidas pelo método de Galerkin-Urabe (Urabe, 1966; Bouc, 1970).

O método de Ritz consiste em substituir no funcional de energia uma função de aproximação para a deflexão da coluna, usualmente na forma de séries, cujos termos devem respeitar as condições de contorno forçadas do problema

$$f_n = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \quad (32)$$

onde a_j são constantes que multiplicam as funções ϕ_j e n é o número de coordenadas adotado para a descrição do campo de deslocamentos com a precisão necessária.

Supondo-se uma coluna enterrada até uma certa altura H , pode-se dividir esta em duas colunas, uma enterrada (1) e outra desenterrada (2) com os deslocamentos transversais descritos pelas seguintes expressões:

$$w(x,t) = \begin{cases} w_1(x,t) = \sum_{j=1}^n w_{1j}(x)c_j(t); & 0 \leq x \leq H \\ w_2(x,t) = \sum_{j=1}^n w_{2j}(x)c_j(t); & H \leq x \leq L \end{cases} \quad (33)$$

onde $w_{1j}(x)$ e $w_{2j}(x)$ são expressões para os

deslocamentos, em função do eixo x , e $c_j(t)$ é a amplitude do deslocamento em função do tempo, que se quer efetivamente determinar.

A escolha adequada das funções de interpolação é um passo essencial nesse tipo de problema e, neste caso, serão utilizadas as soluções analíticas de $w_{ij}(x)$ obtidas no caso linear para os modos de vibração da coluna. Assim, são atendidas, modo a modo, todas as condições de contorno e continuidade, conseguindo-se obter com um número pequeno de modos uma solução bastante precisa para o problema não-linear.

Substituindo as expressões de $w(x,t)$ para cada coluna na função de Lagrange e integrando no espaço, obtém-se um funcional da forma

$$\int_{t_1}^{t_2} F(c_j, \dot{c}_j, t) dt; \quad j = 1, n \quad (34)$$

onde $\dot{c}(t)$ é a derivada de $c(t)$ com relação ao tempo.

A aplicação das técnicas do cálculo variacional leva à obtenção do sistema de equações:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial c_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}_j} \right) \right] \delta c_j dt = 0 \quad (35)$$

onde no caso de sistemas sob vibração livre ou cargas harmônicas adota-se $t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi/\Omega$.

O método de Galerkin-Urabe considera $c(t)$ como uma função que pode ser escrita em séries do tipo:

$$c = \sum_{j=1}^n A_j \phi_j(t) \quad (36)$$

onde cada A_j é a amplitude da função $\phi_j(t)$. Se δc pode ser substituído por

$$\delta c = \left(\frac{\partial c}{\partial A_j} \right) \delta A_j \quad (37)$$

tem-se n equações integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}} \right) \right] \phi_j dt = 0 \quad (38)$$

Uma solução comumente adotada para sistemas sob vibração livre ou cargas harmônicas é

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) + A_2 \text{cos}(\Omega t) \quad (39)$$

Logo, adotando-se a equação (39) se obtém um sistema com duas equações:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}} \right) \right] \text{sen}(\Omega t) dt = 0 \quad (40)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{c}} \right) \right] \text{cos}(\Omega t) dt = 0 \quad (41)$$

Após a integração, tem-se duas equações algébricas não-lineares com três incógnitas: A_1 , A_2 e Ω .

A resolução do sistema assim gerado, com duas

equações não-lineares e três incógnitas, é realizada pelo método de Newton-Rapson. Este método consiste em reescrever as equações não-lineares em séries de Taylor e substituir nestas as coordenadas de um ponto inicial na vizinhança da frequência natural. Fazendo-se isto, o método indica o incremento para o novo passo e, desta forma, é possível obter um novo valor para as coordenadas, no caso A_1 e A_2 . Repete-se este passo até que o erro seja inferior a um valor previamente estipulado.

$$\text{Considerando as duas equações não-lineares} \\ g(A_1, A_2) = 0 \text{ e } h(A_1, A_2) = 0 \quad (42)$$

tem-se que reescritas em séries de Taylor são

$$g(A_1, A_2) = g(A_{10}, A_{20}) + \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_1} + \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_2} \quad (43)$$

$$h(A_1, A_2) = h(A_{10}, A_{20}) + \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_1} + \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \Delta_{A_2} \quad (44)$$

onde $g(A_{10}, A_{20})$ e $h(A_{10}, A_{20})$ indicam o valor das expressões de g e h em um ponto inicial.

Ao escreve-las na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \Delta_{A_1} \\ \Delta_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} & \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_1} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \\ \left(\frac{\partial g(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} & \left(\frac{\partial h(A_1, A_2)}{\partial A_2} \right)_{(A_{10}, A_{20})} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -g(A_{10}, A_{20}) \\ -h(A_{10}, A_{20}) \end{bmatrix} \quad (45)$$

onde $g(A_1, A_2)$ e $h(A_1, A_2)$ são iguais a zero, Δ_{A_1} e Δ_{A_2} indicam o valor do incremento a ser somado à consideração inicial. Logo,

$$A_1^{n+1} = A_1^n + \Delta_{A_1} \quad (46)$$

$$A_2^{n+1} = A_2^n + \Delta_{A_2} \quad (47)$$

$$\epsilon = A_1^{n+1} - A_1^n \quad (48)$$

onde (ϵ) representa o erro.

Para a vibração livre, onde as vibrações são funções somente da energia potencial e cinética presentes no sistema, o método de Ritz gera uma equação diferencial não-linear da forma:

$$\ddot{c} + ac + bc^3 + dc^5 = 0 \quad (49)$$

onde a , b e d são constantes que dependem dos parâmetros do sistema.

Neste caso $c(t)$ tem a seguinte forma:

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) \quad (50)$$

A partir da substituição da equação (50) na equação diferencial e empregando o método de Galerkin-Urabe, obtém-se a solução analítica relacionando frequência e amplitude (A_1):

$$A_1(\Omega) = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{-5d(3b - \sqrt{9b^2 + 40d\Omega^2 - 40da})}{d}} \quad (51)$$

A variação da amplitude A_1 com a razão Ω/Ω_n , onde Ω_n é a menor frequência natural, para níveis crescentes de carga é mostrada na Figura 7, onde observa-se um comportamento não-linear do tipo *hardening*.

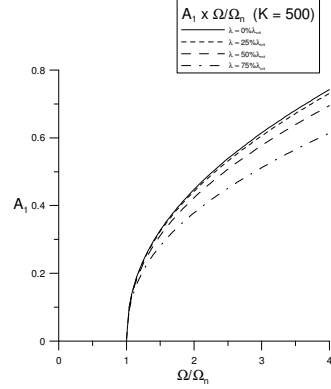


Figura 7: Variação de A_1 em relação a Ω/Ω_n , para $K = 500$

Ao se acrescentar ao funcional de energia não-linear o trabalho da força harmônica, obtém-se a equação de movimento:

$$\ddot{c} + ac + bc^3 + dc^5 = A_0 \text{sen}(\Omega t) \quad (52)$$

onde A_0 é a amplitude e Ω , a frequência da excitação.

Adota-se neste caso $c(t)$ como

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) \quad (53)$$

com A_1 sendo a amplitude de oscilação do sistema.

Aplicando-se o método de Galerkin-Urabe, obtém-se a seguinte expressão analítica para a relação amplitude de oscilação – frequência (ressonância não-linear):

$$\Omega^2(A_1) = a + \frac{3bA_1^2}{4} + \frac{5dA_1^4}{8} + \frac{A_0}{A_1} \quad (54)$$

A Figura 8 mostra as curvas de ressonância para uma coluna biapojada com $\lambda = 50\% \lambda_{crit}$, $h = 1/2$ e $K = 500$ (baixa rigidez da fundação).

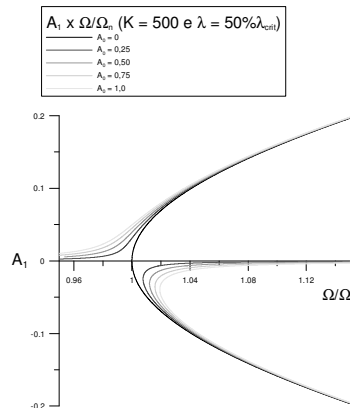


Figura 8: Relação Ω/Ω_n versus A_1 para cinco valores de A_0 e $K = 500$

Considerando a presença do amortecimento viscoso, onde retira-se do sistema uma parcela de energia proporcional à velocidade, tem-se uma equação de movimento não linear do tipo:

$$\ddot{c}(t) + ac(t) + bc(t)^3 + dc(t)^5 = e\dot{c}(t) + fA_0 \text{sen}(\Omega t) \quad (55)$$

O método de Galerkin-Urabe é aplicado considerando a seguinte expressão para $c(t)$:

$$c(t) = A_1 \text{sen}(\Omega t) + A_2 \text{cos}(\Omega t) \quad (56)$$

sendo A_1 e A_2 as amplitudes das funções seno e co-seno, e Ω , a frequência da excitação.

Obtém-se para esta situação um sistema com duas equações e três incógnitas (A_1 , A_2 e Ω) que será resolvido pelo método de Newton-Rapson, como explicado anteriormente.

Segundo Thomson (1978), a análise das vibrações do sistema amortecido fica mais clara quando se analisa a amplitude A dada pela seguinte expressão:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (57)$$

Desta forma, a Figura 9 mostra a relação entre A e o parâmetro de frequência normalizado, onde são mostrados os saltos dinâmicos devidos a bifurcações do tipo nó-sela ao longo da curva de ressonância.

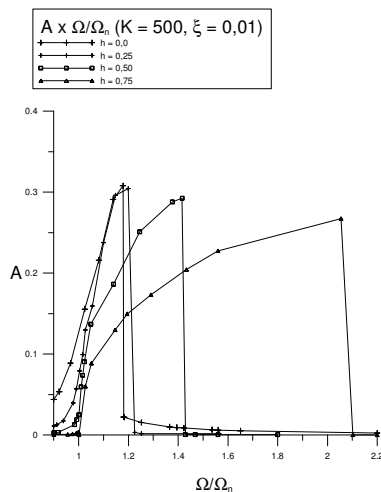


Figura 9: Variação da amplitude A versus a razão Ω/Ω_n para quatro profundidades de fundação diferentes

Conclusões

A partir da análise linear tem-se que, apesar do uso de programas de álgebra simbólica facilitar a resolução de diversos problemas regidos por equações diferenciais que antes eram tratados somente por meio de métodos aproximados, as soluções revelam-se bastante sensíveis do ponto de vista numérico, em função da presença de funções exponenciais e hiperbólicas. No presente estudo, o determinante característico do problema de autovalor, uma expressão bastante longa e altamente não-linear, mostrou-se particularmente sensível,

exigindo uma manipulação cuidadosa das parcelas e a adoção de 64 algarismos significativos para superar os problemas de instabilidade numérica. Com estes cuidados foi possível obter com precisão as frequências naturais e modos de vibração da coluna.

Na análise não-linear as equações diferenciais de movimento, que definem um sistema oscilatório não-linear, exigem que os métodos analíticos de solução sejam substituídos por métodos aproximados como o método de Galerkin-Urabe. A partir dos métodos aproximados, obtêm-se as relações amplitude – frequências de vibração e curvas de ressonância não-lineares, tornando possível a análise dinâmica quantitativa. O programa montado em MAPLE permitiu verificar o tipo e grau de não-linearidade exibido por colunas semi-enterradas. Verificou-se que o comportamento é típico de sistemas não-lineares com ganho de rigidez (*hardening*) e que a não-linearidade cresce com o nível de carregamento estático.

Por fim observou-se que a rigidez e profundidade da fundação têm uma influência marcante no comportamento linear e não linear da coluna.

Referências

- [1] R. Bouc, Sur la Methode de Galerkin-Urabe pour les Systemes Differentiels Periodiques, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 7 (1972) 175-188.
- [2] C. Dym; I. Chames, “Solid Mechanics – A Variational Approach”. McGraw-Hill, New York, 1973
- [3] H. Leipholz, “Stability Theory”, Academic Press, New York, 1970.
- [4] S. Lynch, “Dynamical Systems with Applications using Maple”, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [5] L. Perko, “Differential Equations and Dynamical Systems”, Springer, New York, 2001.
- [6] H. G. Poulos; E.H. Davis, “Pile Foundation Analysis and Design”, John Wiley and Sons, New York, 1980.
- [7] A. G. Sampaio, Análise do Comportamento Dinâmico de Colunas Semi-Enterradas, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 2004
- [8] K. Terzaghi, “Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction”, *Geotechnique*, 1955.
- [9] W. T. Thomson, “Teoria da Vibração com Aplicações”, Interciência, Rio de Janeiro, Título Original: “Theory of Vibration with Applications”, 1978.
- [10] T. Urabe; A. Reiter, Numerical Computation of Nonlinear Forced Oscillations by Galerkin’s Procedure, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 14 (1966) 107-140.