Resolução de Problemas de Inequações Variacionais Usando Variações da Função de Fischer-Burmeister

Roberto Andreani, **Paulo Sérgio da Silva Gouveia**[*],
Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: andreani@ime.unicamp.br, paulossg@ime.unicamp.br,

Problemas de Inequações Variacionais e de Complementaridade provêem de uma diversidade de fontes e disciplinas. A enorme gama de aplicações destes problemas faz com que o seu estudo, tanto teórico quanto prático, seja de suma importância para a matemática moderna.

Segundo Pang [5], as fontes de tais problemas podem ser classificadas basicamente em três categorias, que são elas: programação matemática, problemas de equilíbrio em economia e aplicações na engenharia.

Atualmente existem vários métodos propostos para resolver problemas de complementaridade e de inequações variacionais; muitos desses métodos estão fundados no fato de reformulá-los como um sistema de equações não lineares homogêneas, ou como problemas de otimização , veja [2, 3, 4]. Motivados pelas características especiais e pelo ótimo desempenho da função de Fischer-Burmeister Penalizada para o problema de complementaridade não linear em [1], neste trabalho estendemos sua aplicação para a resolução do problema de inequações variacionais com restrições de igualdade (lineares) e de desigualdade e com restrições do tipo caixa, estudando suas propriedades práticas e teóricas.

Utilizando os conceitos de Função-NCP e de Função de Mérito trabalhamos com as funções de Fischer-Burmeister

$$\phi_{FB}(a,b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

e Fischer-Burmeister Penalizada

$$\phi_\lambda(a,b) := \lambda\phi_{FB}(a,b) + (1-\lambda)a_+ b_+,$$

com diferentes parâmetros para reformularmos os Problemas de Inequações Variacionais, que não são problemas de otimização, como um problema de otimização equivalente.

Nossa reformulação se baseia no fato de transformar um problema de Inequações Variacionais em um sistema de equações homogêneas equivalente via uma Função-NCP, depois transformar este sistema homogêneo em um problema de otimização equivalente.

Uma vez que a maioria dos métodos usados para encontrar pontos ótimos de funções convergem para pontos estacionários das mesmas, que nem sempre são ótimos globais apresentamos resultados que mostram a equivalência entre pontos estacinários do problema de otimização com as soluções do problema original que são:

- Para Problemas de Complementaridade Não-Linear:

  Teorema 1 *Assuma que x^* é um ponto estacionário de Ψ_λ tal que o Jacobiano $F'(x^*)$ seja uma P_0-matriz. Então x^* é uma solução do $NCP(F)$.*

- Para Problemas de Inequações Variacionais com restrições do tipo Caixa:

  Teorema 2 *Seja $w^* = (x^*, z^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ um ponto estacionário de Ψ_λ. Assuma que*

  1. *$\nabla F(x^*)_{ff}$ é não singular e;*
  2. *o Complemento de Schur $\nabla F(x^*)/\nabla F(x^*)_{ff}$ é uma P_0-matriz.*

  Então, $\Psi_\lambda(w^*) = 0$ e x^* é solução do $VIP(F, l, u)$.

- Para Problemas de Inequações Variacionais Gerais:

  Teorema 3 *Se $t^* = (x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}^{n+p+m}$ é um ponto estacionário de $\Psi_\lambda(t)$ e*

  $$K^t[F^{'}(x^*) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* \nabla^2 g_i(x^*)]K > 0.$$

  Então, x^* é uma solução do $VIP(F, \Omega)$.

Resultados sobre curvas de nível foram mostrados e a vantagem da função de Fischer-Burmeister Penalizada neste quesito foi mostrada claramente.

[*]Projeto financiado pela Capes

Em nossa gama de problemas propostos procuramos inserir tanto problemas clássicos da literatura sobre o tema, como alguns dos problemas das bibliotecas **GAMSLIB e MCPLIB**, quanto problemas de outras fontes.

Nossos experimentos numéricos mostraram que a função de Fischer-Burmeister Penalizada é competitiva com a função de Fischer-Burmeister, notamos que quanto maior a dimensão do problema, maior a dificuldade da estratégia de minimização ser robusta no VIP-caixa e no VIP geral, pois a quantidade de variáveis da função de mérito aumenta significativamente.

Com isso, podemos concluir que a penalização da função de Fischer-Burmeister é benéfica pois, sempre apresentamos um parâmetro de $\lambda \neq 1$ que se comportou melhor do que a função de Fischer-Burmeister sem penalização.

Referências

[1] B. Chen, X. Chen and C. kanzow: A Penalized Fischer-Burmeister NCP-function Theoretical Investigation and Numerical Results, Mathematical Programming, 88, pp.211-216, 2000.

[2] F. Facchinei and J. Soares: A New Merit Function for Nonlinear Complementarity Problems and a Related Algorithm, SIAM Journal on Optimization 7, pp.225-247, 1997.

[3] C. Kanzow: Nonlinear Complementarity as Unconstrained Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications 88, 1, pp.139-155, 1996.

[4] C. Kanzow, H. Kleinmichel: A New Class of Semismooth Newton-Type Methods for Nonlinear Complementarity Problems. Preprint 118, Institute of Applied Mathematics, University of Hamburg, Hamburg, Germany, 1997.

[5] J.S. Pang: Complementarity Problems. In: R. Horst and P.M. Pardalos (eds), Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Plublisher, Dordrecht, pp. 271-338, 1995.