

# Trajetória ótima de uma estrutura paralela para diferentes combinações dos ângulos de entrada

Sezimária F. P. Saramago, Rafael G. Rosa

Universidade Federal de Uberlândia - Campus Santa Mônica,  
Av. João Naves de Ávila, 2160, Santa Mônica, Uberlândia, MG, Brasil.  
E-mail: [saramago@ufu.br](mailto:saramago@ufu.br), [rafamec@gmail.com](mailto:rafamec@gmail.com)

Plínio J. Oliveira

Universidade Federal de Goiás - Campus Catalão,  
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, CEP 75701-220, Catalão, GO, Brasil.  
e-mail: [plinio127@ibest.com.br](mailto:plinio127@ibest.com.br)

## 1. INTRODUÇÃO

Os robôs manipuladores podem ser classificados de acordo com vários critérios, tais como: graus de liberdade, estrutura cinemática, geometria do espaço de trabalho e tecnologia de locomoção. Quanto a estrutura cinemática os manipuladores podem ser seriais ou paralelos. Os robôs seriais possuem cadeias abertas, sendo que seus elementos mecânicos estão dispostos em série, ao passo que os manipuladores paralelos apresentam estrutura cinemática fechada e normalmente são formados por uma plataforma fixa e outra móvel.

O objetivo deste trabalho é determinar a trajetória ótima para a plataforma móvel de estruturas paralelas através da minimização de um funcional de energia e do tempo do percurso, sendo que as equações de movimento são definidas por B-splines cúbicas. Algoritmos Genéticos serão utilizados na solução do problema ótimo.

A metodologia desenvolvida será aplicada ao CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator), robô com estrutura paralela desenvolvido no Laboratório de Robótica e Mecatrônica em Cassino, Itália [1].

O CaPaMan é composto de uma plataforma fixa (PF) e uma móvel (PM) as quais são conectadas entre si por três pernas. Cada uma delas fixada à PF através de um mecanismo articulado de quatro barras, os quais se mantêm sempre na vertical e possuem juntas rotacionais. Os centros das bases destes mecanismos estão dispostos nos vértices de um triângulo equilátero na PF, de modo que os planos que os contém, formam entre si ângulos de  $120^\circ$ ; atribuindo desta forma propriedades de simetria ao manipulador.

O movimento do CaPaMan é gerado por três atuadores independentes situados na junta rotacional da manivela de entrada de cada mecanismo de quatro barras. Os ângulos  $\alpha_i$  determinados pelas bases e as manivelas de entrada dos mecanismos de quatro barras são as variáveis cinemáticas do manipulador. Assim, dados os ângulos iniciais e finais de cada atuador, pretende-

se determinar a trajetória que necessita de menor energia e menor tempo para ser realizada.

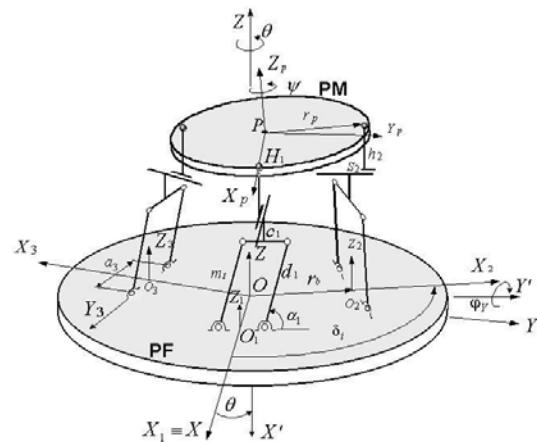


Figura 1. Arquitetura e parâmetros do CaPaMan.

Para descrever o comportamento cinemático e dinâmico do CaPaMan considera-se dois sistemas. Um sistema inercial OXYZ é fixado à PF, sendo que a origem O é o centro da PF. O outro sistema  $PX_PY_PZ_P$  é atado à PM e P é o centro da PM, o eixo X tem a mesma direção do segmento ligando os pontos O e  $O_1$ . O eixo Z é perpendicular ao plano da PF e Y é tomado neste plano de modo a definir um sistema cartesiano. O sistema móvel  $PX_PY_PZ_P$  é fixado de modo que o eixo  $X_P$  seja coincidente com a linha que une os pontos P(x, y, z) e  $H_1$ . O eixo  $Y_P$  é colocado sobre a PM de maneira que o sistema móvel seja ortogonal. Como os planos que contém os mecanismos de quatro barras formam entre si ângulos de  $120^\circ$ , cada sistema cartesiano de referência  $O_iX_iY_iZ_i$  para  $i=1,2,3$  é tomado de maneira que  $O_i$  coincida com o centro da base  $a_i$  do mecanismo de quatro barras. O eixo  $X_i$  é perpendicular ao plano do mecanismo de quatro barras, o eixo  $Y_i$  coincide com a base do mecanismo e  $Z_i$  é tomado de modo que o sistema de referência  $O_iX_iY_iZ_i$  seja cartesiano. Desse modo cada  $X_i$  é girado de  $120^\circ$  em relação ao  $X_i$  imediatamente anterior. A orientação do sistema móvel  $PX_PY_PZ_P$  fixo à PM é descrita em relação ao sistema inercial OXYZ pelos ângulos de Euler  $\theta, \varphi$  e  $\psi$ , onde  $\theta$  é a rotação em torno do eixo Z,  $\varphi$

é a rotação em torno do eixo  $Y'$ , rotação que inclina a PM em relação ao sistema inercial e  $\psi$  é uma rotação em torno do eixo  $Z_p$ .

## 2. MODELAGEM GEOMÉTRICA

Realizou-se o modelo geométrico a fim de determinar as coordenadas do ponto central da plataforma móvel,  $P(x,y,z)$ , em função das variáveis de entrada  $\alpha_i$ .

Utilizando-se as propriedades de simetria do CaPaMan [6] obtém-se a posição do ponto P e a orientação da plataforma móvel em termos dos ângulos de Euler  $\theta, \varphi$  e  $\psi$ , em relação ao sistema fixo OXYZ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{3}} - \frac{r_p}{2}(1 - s\varphi)c(\psi - \theta), \\ y &= y_1 - r_p(c\theta s\psi + s\theta s\varphi c\psi), \\ z &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \text{tg}^{-1} \left( \sqrt{3} \frac{z_3 - z_2}{2z_1 - z_2 - z_3} \right) \\ \theta &= \text{sen}^{-1} \left[ \frac{2(y_1 + y_2 + y_3)}{3r_p(1 + s\varphi)} \right] - \psi \\ \varphi &= \text{cos}^{-1} \left( \pm \frac{2}{3r_p} \sqrt{V_1} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

sendo

$$V_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3$$

$$y_i = m_i c\alpha_i, \quad z_i = m_i s\alpha_i + h_i \quad (3)$$

onde, c e s representam o cosseno e seno de um dado ângulo.

A matriz de transformação de coordenadas é dada por:

$$R = \begin{pmatrix} c\theta s\varphi c\psi - s\theta s\psi & -c\theta s\varphi s\psi - s\theta c\psi & c\theta c\varphi \\ s\theta s\varphi c\psi + c\theta s\psi & -s\theta s\varphi s\psi + c\theta c\psi & s\theta c\varphi \\ -c\varphi c\psi & c\varphi s\psi & s\varphi \end{pmatrix} \quad (5)$$

## 3. MODELAGEM DA TRAJETÓRIA E DAS CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS

Para determinar a trajetória das juntas utilizam-se os pontos iniciais e finais,  $P_0$  e  $P_m$ , da trajetória do manipulador, em coordenadas cartesianas. Os

pontos dados podem ser transformados em coordenadas das juntas quando o modelo cinemático inverso é calculado.

Seja um polinômio cúbico escolhido para descrever a trajetória dos ângulos das juntas. B-splines são freqüentemente usadas para interpolar funções que representam trajetórias de sistemas mecânicos, pois permitem o controle contínuo entre dois segmentos adjacentes, possibilitando transmissões suaves nos atuadores dos manipuladores.

Seja cada trajetória  $\alpha_k(t)$  modelada pela B-Spline cúbica uniforme abaixo:

$$\alpha_k(t) = \sum_{i=0}^m p_i^k B_{i,d}^k(t) \quad m \geq 3, \quad k=1,2,3. \quad (6)$$

onde  $p_i^k$  são os pontos de controle correspondentes da trajetória  $\alpha_k(t)$ , e  $B_{i,d}$  são as funções definidas pela fórmula de recorrência de Cox deBoor (Oliveira,2004), para  $d=3$  obtém-se a spline cúbica:

$$B_{i,d}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{out} \end{cases}$$

$$B_{i,d}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+d-1}-t_i} B_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d}-t}{t_{i+d}-t_{i+1}} B_{i+1,d-1}(t) \quad (7)$$

Como  $\alpha_k(t)$  é um polinômio cúbico, suas  $j$ -ésimas derivadas em relação ao tempo podem ser calculadas.

No projeto de otimização as variáveis são os pontos de controle  $p_i^k$  de cada trajetória e o tempo total de percurso.

## 4. MODELO DINÂMICO

Com o objetivo de determinar o torque necessário em cada atuador, utilizou-se a formulação de Newton-Euler sendo que as propriedades de simetria do CaPaMan facilitaram a análise das forças envolvidas, considerando o manipulador como um corpo rígido [8].

A posição, a velocidade e a aceleração da plataforma móvel são obtidas do modelo geométrico e cinemático do CaPaMan.

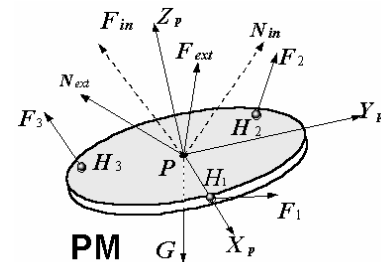


Figura 2. Forças na plataforma fixa e móvel.

Deste modo, o equilíbrio dinâmico para a PM é representado pelas equações de Newton-Euler na forma:

$$F + F_{ext} + G = F_{in} , \quad N + N_{ext} = N_{in} \quad (9)$$

onde,  $F_{ext}$  é a força externa;  $N_{ext}$  é o torque externo;  $G$  é o peso da plataforma móvel;  $F$  é a soma das forças de reação  $F_i$  ( $i=1, 2,3$ ) nos pontos  $H_i$  da PM;  $N$  é o torque resultante em relação ao sistema de referência OXYZ fixo na base PF. Além disso, devem ser consideradas as expressões:

$$F_{in} = M a_P , \quad N_{in} = I \dot{\omega} + \omega \times I \omega , \quad F = \sum_{i=1}^3 F_i ,$$

$$N = \sum_{i=1}^3 (r_P R u_{Pi}) \times F_i \quad (10)$$

onde,  $M$  é a massa da PM;  $a_P$  é a aceleração do ponto central P;  $\dot{\omega}$  e  $\omega$  são a aceleração angular e velocidade;  $I$  é a matriz de inércia da plataforma móvel.

Os torques de entrada de cada mecanismo articulado de quatro barras é calculado através do equilíbrio dinâmico das pernas, sendo  $\tau_{Pi}$ , o torque devido à inércia da plataforma móvel e  $\tau_{Mi}$  devido à inércia das pernas do CaPaMan:

$$\tau_i = \tau_{Pi} + \tau_{Mi} \quad (11)$$

## 5. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A energia nos atuadores necessária para executar uma dada trajetória é calculada por:

$$E = \int_0^{T_t} \sum_{i=1}^n [\tau_i(t) \dot{\alpha}_i(t)] dt \quad (12)$$

A trajetória ótima é aquela cujo tempo de percurso e a energia gasta pelos atuadores é mínima, observando que estes dois objetivos são conflitantes entre si. Neste trabalho, o tempo e a energia são abordados de forma conjunta através de uma função multi-objetivo. Utilizando o método de ponderação dos objetivos, o problema de otimização é definido como:

$$\min f = K_1 \frac{E}{E_0} + K_2 \frac{T_t}{T_0} \quad (13)$$

sujeito a

$$\alpha_i^l \leq [\alpha_i(t)] \leq \alpha_i^u \quad (i=1,2,3)$$

onde,  $K_1$  e  $K_2$  são fatores de ponderação,  $T_t$  é o tempo total de percurso,  $T_0$  é o tempo total do trajetória inicial,  $E$  é a energia mecânica total da trajetória,  $E_0$  é a energia mecânica da trajetória inicial,  $\alpha_k^l$  e  $\alpha_k^u$  são os ângulos iniciais e finais de cada mecanismo.

Então, adotados  $N_p$  pontos, para um manipulador com  $n=3$  mecanismos, ao desenvolver a Eq. (6) para o deslocamento, obtém-se um total de  $n(N_p + 2)$  incógnitas a determinar. O número total de equações para cada mecanismo devido ao deslocamento é  $N_p$ . Torna-se necessário, portanto, considerar conhecidas as velocidades iniciais e finais para obter duas novas equações (normalmente  $\dot{\alpha}_{oi} = \dot{\alpha}_{fi} = 0$ ). Desta forma, obtém-se um sistema de  $n(N_p + 2)$  equações lineares e  $n(N_p + 2)$  incógnitas  $C_j^i$  a serem determinadas. No problema de otimização da trajetória as variáveis de projeto são os coeficientes dos polinômios  $C_j^i$  e o tempo total  $T_t$ .

## 6. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Nestas simulações as splines foram construídas considerando  $N_p = 80$  pontos. A velocidade dos pontos iniciais e finais é nula.

Utilizou-se um programa elaborado no MATLAB para cálculo da energia, em conjunto com o programa de otimização GAOT [3]. Durante o processo de otimização foi adotado 200 indivíduos e 200 gerações.

Variando-se os fatores de ponderação da função multi-objetivo dada na Eq. (13), obtém-se o conjunto de soluções ótimas de Pareto (Osyczka, 1981). Neste trabalho serão apresentadas apenas duas destas soluções, analisando a influência nas trajetórias ótimas calculadas.

### 6.1. Prioridade à Energia Gasta Pelos Atuadores ( $K_1=0.8$ ; $K_2=0.2$ ):

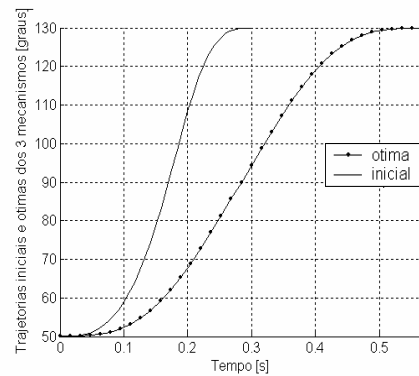


Figura 3. Trajetória dos mecanismos

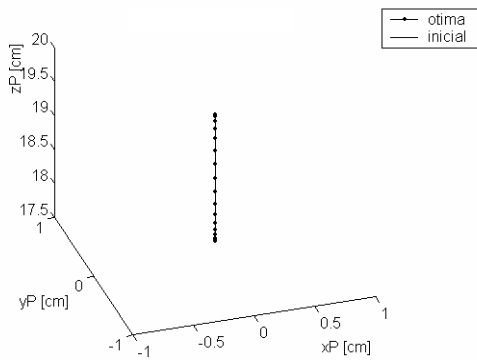


Figura 4. Trajetória do ponto central da plataforma móvel.

No primeiro caso em estudo os três mecanismos possuem os ângulos de entrada iguais  $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ , variando de  $50^\circ$  a  $130^\circ$ .

Considerando o tempo total da trajetória inicial  $T_0=0,3$  s, a energia inicial calculada vale  $E_0=684.65$ J. A variação dos ângulos de entrada são representados na Fig.3. Para este caso a trajetória do ponto central da plataforma móvel resulta em uma translação vertical, como pode ser observado na Fig. 4. O tempo ótimo obtido foi  $T_1= 0,56$  s e a energia ótima  $282.32$  J (reduz em  $58.7\%$  do valor inicial).

O segundo caso considera a seguinte combinação dos ângulos de entrada:  $\alpha_1=\alpha_3\neq\alpha_2$ , utilizando as seguintes variações:  $50^\circ < \alpha_1=\alpha_3 < 120^\circ$ ,  $60^\circ < \alpha_2 < 90^\circ$ . A variação dos ângulos de entrada são representados na Fig. 5(a) e (b) e a trajetória curvilínea na Fig.5(c).

A energia inicial é de  $E_0 = 433.88$  J . O tempo ótimo obtido foi  $T_1=0,57$  s e a energia ótima  $E= 177,79$  J (reduz em  $59\%$  do valor inicial).

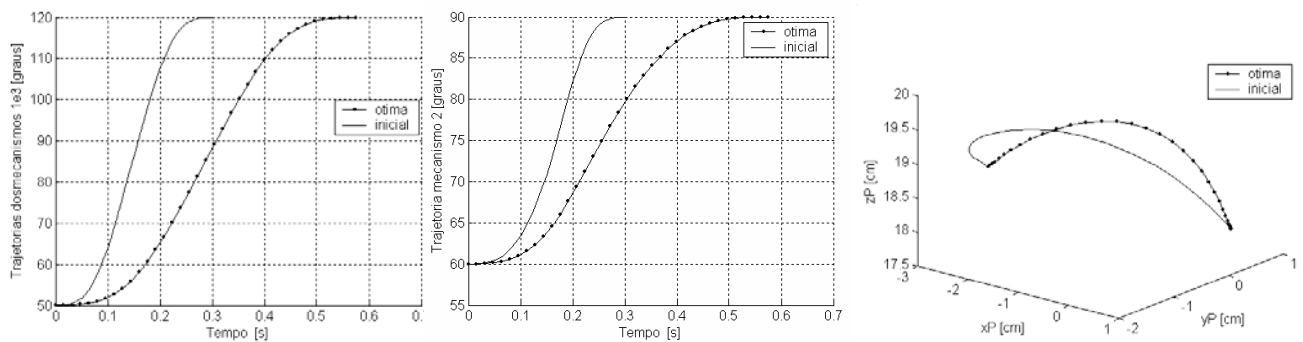


Figura 5. Resultados obtidos para o caso 2:  $\alpha_1=\alpha_3\neq\alpha_2$ ,  $K_1=0.8$ ;  $K_2=0.2$ . (a) Trajetória dos mecanismos 1 e 3, (b) Trajetória do mecanismo 2, (c) Trajetória do ponto central da plataforma móvel.

O terceiro caso considera que os ângulos de entrada de cada mecanismo podem variar de forma independente:  $\alpha_1\neq\alpha_2\neq\alpha_3$ . A variação adotada para os ângulo de entrada são:  $80^\circ < \alpha_1 < 100^\circ$ ,  $60^\circ < \alpha_2 < 130^\circ$ ,  $50^\circ < \alpha_3 < 120^\circ$ . A variação dos ângulos de

entrada são representados na Fig.6, e a trajetória curvilínea na Fig. 6. O cálculo da energia inicial resultou em  $E_0 = 572,15$  J. O tempo ótimo obtido foi  $T_1= 0,50$ s e a energia ótima  $E = 181,64$ J (reduz em  $68,2\%$  do valor inicial).

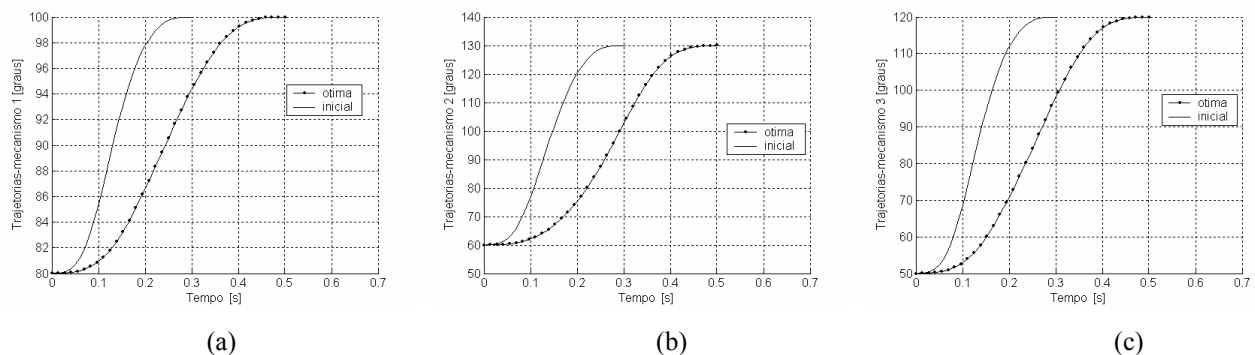


Figura 6. Resultados obtidos para o caso 3, variando os três ângulos:  $\alpha_1\neq\alpha_2\neq\alpha_3=0.8$ ;  $K_2=0.2$ . (a) Trajetória do mecanismo 1, (b) Trajetória do mecanismo 2, (c) Trajetória do mecanismo 3

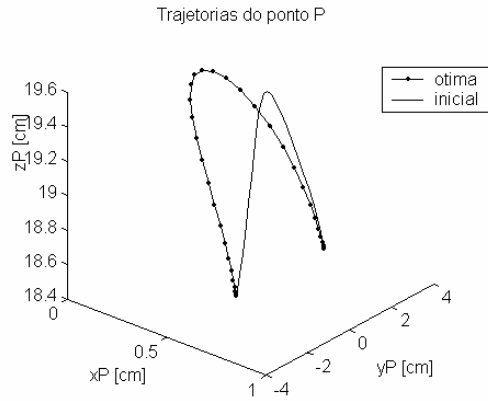
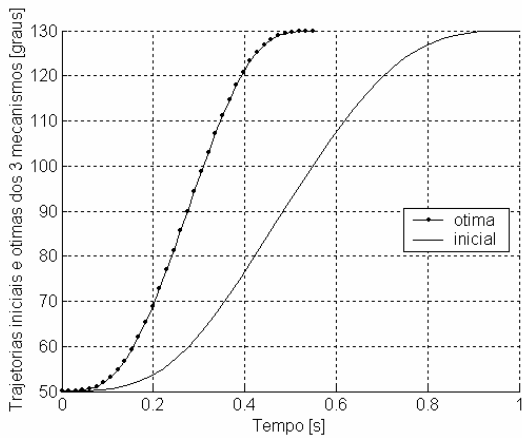


Figura7. Trajetória do ponto central da plataforma móvel para o caso 3:  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 = 0.8$ ;  $K_2 = 0.2$ .

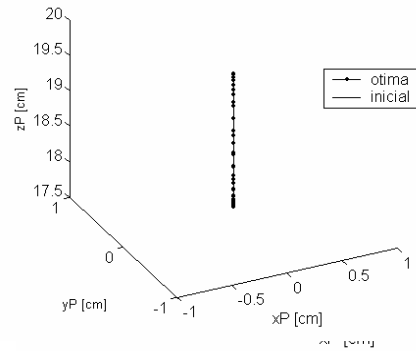
Nestes três casos obteve-se uma redução significativa de energia, mesmo que para isso o tempo total de energia fosse aumentado, resultado esperado pois estes objetivos são conflitantes.

Observe que as trajetórias são descritas por curvas suaves, o que implica em torques suaves.

**6.2. Prioridade ao Tempo de Percurso ( $K_1=0.2$ ;  $K_2=0.8$ ):**



(a)



(b)

Figura 8. Resultados obtidos para o caso 4, com três ângulos iguais,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ,  $K_1 = 0.2$ ;  $K_2 = 0.8$ :

(a) Trajetória dos mecanismos, (b) Trajetória do ponto central da plataforma móvel.

No caso 4 considerou-se que os três mecanismos possuem os ângulos de entrada iguais  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ , variando de  $50^\circ$  a  $130^\circ$ . Para verificar a otimização do tempo total de percurso adotou-se tempo total inicial  $T_0 = 1s$ , sendo a energia inicial calculada  $E_0 = 154.06J$ . A variação dos ângulos de entrada é representada na Fig. 8(a). Como esperado a trajetória resulta em uma translação vertical, como pode ser observado na Fig.8(b). O tempo ótimo obtido foi  $T_f = 0,55 s$  e a energia ótima  $292.98 J$  (aumenta em 90 % do valor inicial).

O caso 5 considera que os ângulos de entrada,  $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$ , utilizando as seguintes variações:  $50^\circ < \alpha_1 = \alpha_3 < 120^\circ$ ,  $60^\circ < \alpha_2 < 90^\circ$ . A variação dos ângulos de entrada são representadas na Fig. 9(a) e (b) e a trajetória curvilínea na Fig.9(c). O cálculo da energia inicial resultou em  $E = 96.33 J$ . O tempo ótimo obtido foi  $T_f = 0,558 s$  e a energia ótima  $E = 183.29J$ . Observe que o tempo reduz em 44% e a energia aumenta em 90,2%.

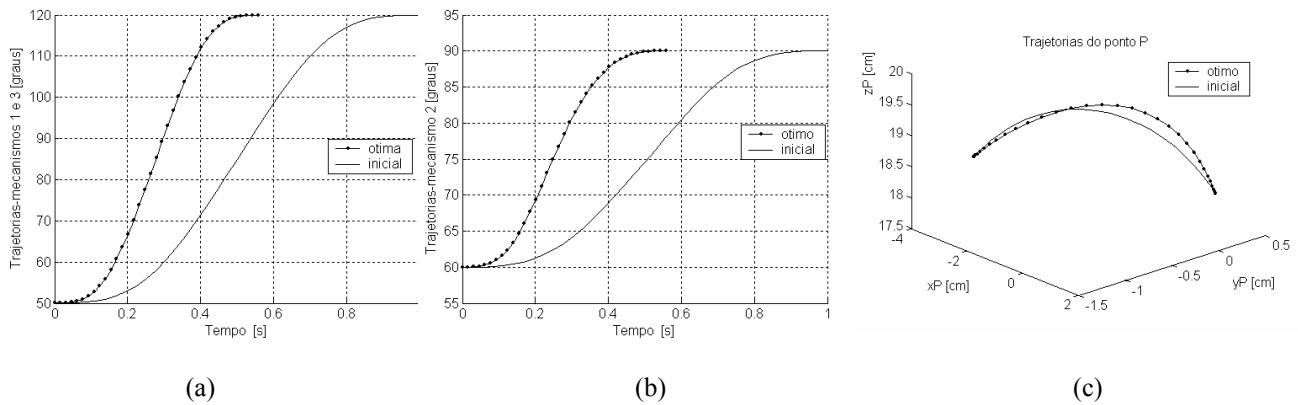


Figura 9. Resultados obtidos para o caso 5,  $\alpha_1=\alpha_3\neq\alpha_2$ ,  $K_1=0.2$ ;  $K_2=0.8$ :(a) Trajetórias dos mecanismos 1 e 3, (b) Trajetória do mecanismo 2,(c) Trajetória do ponto central da plataforma móvel.

## 7. CONCLUSÃO

Neste trabalho é apresentada uma formulação genérica para a otimização de trajetórias de estruturas paralelas. A trajetória é modelada por B-splines cúbicas. É apresentado um modelo analítico para a dinâmica inversa do CaPaMan, utilizando as equações de Newton-Euler.

O problema ótimo foi definido pela minimização da energia mecânica consumida pelos atuadores e do tempo para a realização da trajetória.

Os resultados obtidos nos casos 1, 2 e 3 apresentam uma grande redução de energia, e considerando que o manipulador executa uma série de processos repetitivos, ao final de um período de trabalho esta economia será enorme.

Já nos casos 4, e 5, o tempo de percurso foi reduzido drasticamente, possibilitando maior rapidez na execução das trajetórias, no entanto com um gasto maior de energia.

Assim, como trata-se de um problema de otimização multi-objetivo, dado um conjunto de soluções ótimas, cabe ao usuário definir aquela que melhor satisfaça as condições operacionais desejadas. Vale ressaltar que o código computacional desenvolvido permite trabalhar com diferentes combinações entre os ângulos de entrada, possibilitando que a estrutura paralela seja capaz de executar diferentes tipos de trajetórias, tornando-a mais versátil e eficiente.

## 8. REFERÊNCIAS

[1]Ceccarelli, M., Figliolini, G. “Mechanical characteristics of CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator)”. In: proceedings of 3<sup>rd</sup> Asian conference on robotics and its application, 1996, Tokyo, pp.301-308.

[2]Carvalho, J.C.M., Ceccarelli, M., 2001, “A closed-form formulation for inverse dynamics of a Cassino Parallel Manipulator”, *Multibody System Dynamics*, Vol. 5,pp. 185-210.

[3]Houck, C.R., J.A. Joinez and M. G. Kay, “ A Genetic Algorithms for Function Optimization: a Matlab Implementation”, NCSU-IE Technical Reported, 1995.

[4]Osyczka, A., 1981, An Approach to Multicriterion Optimization for Structural Design, Proceedings of International Symposium on Optimum Structural Design, University of Arizona.

[5]Haupt, R.L. e S.E. Haupt, “Practical Genetic Algorithm”, John Wiley G. Sons Inc; New York, pp.25-48, 1998.

[6]Rosa, R. G., Oliveira, P.J., Saramago, S. F. P. Modelo Geométrico de um Robô com Estrutura Paralela. *Famat Em Revista*, Uberlandia, v. 02, n. 1, p. 13-35, 2004.

[7]Saramago, S. F. P ; CARBONE, G.; CECCARELLI, M.; OLIVEIRA, P. J.; CARVALHO, J. C. M. Optimum path Planning of Capaman(Cassino Parallel Manipulator) by Using Inverse Dynamics. In: 2nd International Symposium On Multibody Systems And Mechatronics, 2005, Uberlândia. *Musme2005. IFToMM*, 2005. v. 1, p. 332-343

[8]Tsai, L.W., 1999, “Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators”, John Wiley & Sons, New York.