Estudo dos Valores Iniciais para Algoritmos Baseados na Distância de Bregman na Solução de Problemas inversos de Transferência Radiativa 1D

Mariella J. Berrocal T., Nilson C. Roberty
Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEN – COPPE,
CP 68509, CEP 21945-970, RJ, Brasil
E-mail: mabet99@yahoo.com, nilson@con.ufrj.br

Raul F. Carita M., Jorge P. Zubelli
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Est. D. Castoria 110, Rio de Janeiro, RJ CP 22460-320, Brasil
E-mail: carita@impa.br , zubelli@impa.br

Resolver um problema inverso com sucesso muitas vezes está relacionado a os dados iniciais e ao método empregado na solução do problema inverso. Neste trabalho, para a estimativa dos coeficientes de absorção em um meio unidimensional começamos resolvendo o problema direto, que é modelado pela equação de Boltzmann, empregando os métodos de diferencias finita e ordenadas discretas.

O problema inverso consiste em estimar os coeficientes de absorção a partir das medidas feitas pelos detectores posicionados fora do meio em questão. Este problema foi formulado como um problema de otimização onde vamos minimizar a distância de Bregman restrito à função erro. [1]-[3].

A distância de Bregman [4] pode ser definida como o termo de resto da expansão da serie de Taylor. Ou seja,

$$D(z,z_o)=D(\eta(z),\eta(z_o))=\eta(z)-\eta(z_o)-\langle\nabla\eta(z_o),z-z_o\rangle \tag{1}$$

onde η é de uma função estritamente convexa [5], e $z=(z_1,z_2,...,z_p)$ é o vetor formado por todas as incógnitas do sistema, z_o é um vetor a priori e

$$\langle\nabla\eta(z_o),z-z_o\rangle = \left.\frac{\partial\eta}{\partial z}\right|_{z_o}(z-z_o) \tag{2}$$

Neste trabalho empregamos uma família de funções convexas, η_{sr}, para construir famílias de distâncias de Bregman, que são usadas para estimar o coeficiente de absorção em um meio unidimensional.

$$\eta_{sr}(z_i)=\frac{z_i^s-z_i^r}{s-r} \tag{3}$$

com $s>1$ e $r\in(0,1]$, ou $r>1$ e $s\in(0,1]$, os intervalos dos parâmetros s e r para a qual η_{sr} é estritamente convexa;

A eq. (3) esta relacionada com:

1. A entropia de Shanon (1948), [6]

$$H_1(z)=-\sum_{i=1}^{p} z_i \ln z_i \tag{4}$$

obtendo $\eta_1(z_i)=z_i\ln z_i$ com $r\to1$ e $s\to1$,[7]

2. Havdra – Charvat (1967), [8]

$$H_2(z)=\frac{1}{1-s}\left(\sum_{i=1}^{p} z_i^s - z_i\right) \tag{5}$$

obtendo $\eta_2(z_i)=\dfrac{z_i^s-z_i}{s-1}$ com $s>0$ e $s\neq1$

3. Sharma-Taneja (1975), [9]

$$H_3(z)=\frac{1}{r-s}\sum_{i=1}^{p}(z_i^s-z_i^r), \tag{6}$$

obtendo $\eta_3(z_i)=\dfrac{z_i^s-z_i^r}{s-r}$ com $s>1$ e $r\in(0,1]$, ou $r>1$ e $s\in(0,1]$,

A distância de Bregman empregada, neste trabalho, para a solução do problema inverso é dada por

$$D_{s,r}(z,z_o)=$$
$$\frac{1}{s-r}\left[\sum_{i=1}^{p}(z_i^s-z_i^r)-\sum_{i=1}^{p}(z_{oi}^s-z_{oi}^r)-\sum_{i=1}^{P}(s\cdot z_{oi}^{s-1}-rz_{oi}^{r-1})(z_i-z_{oi})\right] \tag{7}$$

A função erro é definida como a diferença entre o valor experimental dado pelos detetores que medem intensidade radiativa (ver figura 1) e o valor calculado para a intensidade dos detetores empregando a solução estimada via o problema direto.

•Realização SBMAC, apoio FAPESP, URL: http://www.ibilce.unesp.br/eventos/cnmac/home.htm

Este trabalho tem dois objetivos: (i) Identificar os valores iniciais ótimos relacionados aos parâmetros *s* e *r* empregados nos casos testes e (ii) Desenvolver novos algoritmos para a solução de problemas inversos em transferência radiativa.

Procurando um número que nos indique a qualidade nas estimativas das incógnitas de cada caso teste. Definimos o erro percentual total (Ep) dado por;

$$Ep_e = \left| \frac{\sigma_{e,exato} - \sigma_{e,calculado}}{\sigma_{e,exato}} \right| * 100\% \qquad (8)$$

$$Ept = \frac{\sum_{e=1}^{E} Ep_e}{E}\% \qquad (9)$$

considerando o menor erro percentual (EP) em diferentes casos testes se fez uma comparação entre todos os resultados obtidos com diferentes valores

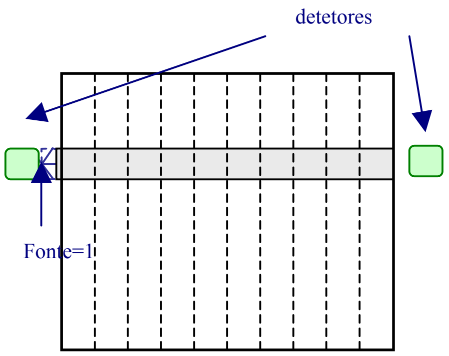

Figura 1. Posição dos detetores

Nos casos testes consideram-se valores no intervalo entre [0.1-1.0] para os coeficientes de absorção.
Os primeiros resultados indicaram que os valores ótimos para r e s foram

$s \rightarrow 1$ com $r > 1$ e $s = 1$ com $0 < r < 1$.

A seguir foi feito um estudo quando $s \rightarrow 1$ com r variando entre (1-20] e s = 1 com r variando entre [0-1], considerando diferentes valores iniciais para todos os casos testes.

Procurando os menores erros porcentuais em todos os casos testes, observamos que os melhores valores iniciais estão relacionados a um determinado valor do parâmetro, estes resultados são apresentados na Tabela 1.

Os resultados da Tabela 1 estão sendo utilizados em algoritmos que resolvem o problema unidimensional para meios heterogêneos, na reconstrução de imagens tomográficas 2D, entre outros.

Tabela 1- Os melhores dados iniciais e *r* ótimos para a estimativa dos coeficientes de absorção

Valores iniciais	Valores de r
σ_{ao} = 0.0001	3<r<5 e 7<r<17
σ_{ao} = 0.001	4<r<5
σ_{ao} = 0.01	4<r<6
σ_{ao} = 0.1	5<r<9
σ_{ao} = 0.5	1
σ_{ao} = 1.0	0.5

Referências

[1] M. J. Berrocal Tito, N. C. Roberty, A. J. Silva Neto, ”Estimación de los Coeficientes de Absorción en un Medio Participante Mediante una Aproximación desde el Unidimensional”, Proc. 5to Encontro de Modelagem Computacional, Nova Friburgo, Brasil. 2002.

[2] .M J. Berrocal Tito, N. C. Roberty, A. J. Silva Neto, ”Absorption and Scattering Coeficient Estimation in two Dimensional Participating Media Using the Generalized Máxima Entropy and Levenberg Marquardt”, Proc. XIII International Nuclear Atlantic Conference, INAC- ENFIR, Rio de Janeiro, Brasil.2002

[3] M J. Berrocal, R. C. Carita, N. C. Roberty, Jorge P. Zubelli, Anais do proceding CILAMCE XXIV, 2004

[4] L. M. Bregman, The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and its Application to the Solution of Problems in Convex Programming, USSR Comp. and Math.l Physics Journal, 7, pp. 200-217, 1967.

[5] D. S. Ramos, O método do Problema Auxiliar com Regularização de Bregman para Inequações Variacionais. Tese de doutorado, UFRJ, Rio , Brazil.

[6] C. E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication. Bell. System Tech. J., v. 27, pp. 379-423.

[7] J. N. Kapur, e H. K. Kesavan, Entropy Optimization Principles with Applications, 1st ed., New York, Academic Press. 1992

[8] J. Havrda, F. Charvat, , Concept of Structural α-Entropy. Kybernetika, v. 3 pp. 30-35. 1967

[9] B. D. Sharma, I. J Taneja, Three Generalized Additive Measures of Entropy. Elect. Infor. Kybern, v. 13, pp. 419-433. 1977