

Tomografia Ótica com a Equação de Transferência Radiativa

Raul F. Carita Montero†, Jorge P. Zubelli

IMPA, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada,
Est. D. Castoria 110
22460-320, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: rfc20000@yahoo.com.br, zubelli@impa.br,

Mariella J. Berrocal Tito

Programa de Engenharia Nuclear, COPPE - UFRJ
21945-970, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: mabet99@yahoo.com.

Presentamos um modelo de tomografia ótica. Para os casos em que espalhamento não pode ser desprezado, tal como em Tomografia Ótica Infravermelha (*Near Infrared Optical Tomography*, NIROT), o modelo de reconstrução é mais complexo e não-linear [1]. A análise da tomografia encontra-se no mesmo contexto do transporte de partículas neutras em reatores nucleares e da transferência de calor por radiação térmica em meios participantes, onde os fenômenos físicos relevantes (absorção, emissão e espalhamento) são modelados pela equação de Boltzmann ou equação de transporte [2].

O transporte de luz em meios espalhadores pode ser modelada pela equação independente do tempo de transferência radiativa [1, 3],

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{x}, \vec{\Omega}) + (\sigma_a + \sigma_s)(\vec{x})\phi(\vec{x}, \vec{\Omega}) \\ = \sigma_s \int p(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')\phi(\vec{x}, \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' \end{aligned} \quad (1)$$

e condições na fronteira

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, \vec{\Omega}) = \phi^{in}(\vec{x}, \vec{\Omega}) \\ \text{para } \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x) < 0 \text{ em } x \in \partial D^- \end{aligned} \quad (2)$$

Onde ϕ é a radiança, $\vec{\Omega}$ é a direção angular de movimento do fóton, σ_a é o coeficiente de absorção, σ_s o coeficiente de espalhamento e

$$p(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{1 - g^2}{2(1 + g^2 - 2g \cos(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'))^{3/2}} \quad (3)$$

é a função de fase do espalhamento que em tecido ótico é a função Henyey- Greenstein. E na Eq. (2) as condições de fronteira considerado que as fontes de radiação incidentes externas são colimadas, e que as fronteiras do meio são transparentes.

Usando a partição de domínio consistente com faixas paralelas de radiação, como mostrado na Fig. 1, e considerando uma direção particular $\vec{\Omega}_j$ com um sistema de coordenadas dados por (s_j, t_j) que é girado em concordância com a direção particular $\vec{\Omega}_j$, a Eq. (1a) pode ser escrita para cada faixa R_{j,n_j} da seguinte maneira

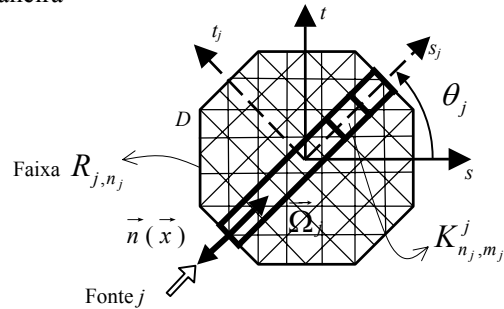


Figura 1 partição de domínio

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_j \cdot \nabla \phi_j(\vec{x}) + (\sigma_a + \sigma_s)\phi_j(\vec{x}) = \sigma_s \sum_{k=1}^{2J} p(\vec{\Omega}_k \cdot \vec{\Omega}_j)\phi_k(\vec{x}) \\ \text{para } j=1, \dots, 2J; \text{ e } \vec{x} \in R_{j,n_j} \subset D, n_j=1, \dots, 2M \end{aligned} \quad (4)$$

Onde a parte integral da Eq. (1) será aproximada por uma quadratura, onde os pesos de quadratura no coeficiente de espalhamento são iguais a um [4], isto tem a vantagem de atribuir igual peso a todas as direções e ser consistente com uma quadratura de tipo trapezoidal, que melhor se adequa a situações nas quais a distribuição angular do fluxo tenha pouca regularidade (descontinuidade), $2M$ é o número total de faixas paralelas que compõem a partição de domínio para cada conjunto de faixas paralelas de radiação que se propaga

•Realização SBMAC, apoio FAPESP, URL: <http://www.ibilce.unesp.br/eventos/cnmac/home.htm>

†Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

ao longo da direção $\vec{\Omega}_j$, R_{j,n_j} representa cada faixa (ver Fig. 1), e ϕ_k é a intensidade da radiação incidente ao longo da direção $\vec{\Omega}_k$ que é espalhada na posição $\vec{x} \in R_{j,n_j}$ para a direção $\vec{\Omega}_j$.

E a condição de contorno da Eq. (2) é escrita como

$$\phi_j(\vec{x}) = \phi_j^{in}(\vec{x}) \text{ para } \vec{\Omega}_j \cdot \vec{n}(\vec{x}) < 0$$

em $\vec{x} \in \partial R_{j,n_j}^-$ (5)

onde $\partial R_{j,n_j}^-$ representa a fronteira da faixa através da qual a radiação externa entra na mesma.

Para solucionar este problema usamos o método de Galerkin descontínuo [5] usando uma função teste contínua irá produzir um sistema de equações lineares globalmente acoplado. A formulação variacional para a Eq. (4) é dada por

para cada segmento K_{n_j,m_j}^j dentro do domínio D , e dados $\phi_j|_{n_j,m_j}$ sobre a fronteira $\partial K_{n_j,m_j}^{j-}$, achar $\phi_j|_{n_j,m_j}$ em cada segmento K_{n_j,m_j}^j tal que

$$(\vec{\Omega}_j \cdot \nabla \phi_j + (\sigma_a + \sigma_s)\phi_j, v)_{K_{n_j,m_j}^j} - \int_{K_{n_j,m_j}^{j-}} [\phi_j]_{n_j,m_j} v^+ \vec{n} \cdot \vec{\Omega}_j ds = (g, v)_{K_{n_j,m_j}^j} \quad (6)$$

onde v é um polinômio contínuo por partes sem continuidade ao atravessar a fronteira inter-elemento, ϕ_{n_j,m_j}^j é expandido em polinômios de v , $[\cdot]$ é o salto de descontinuidade ao atravessar a superfície em $\partial K_{n_j,m_j}^{j-}$ e g corresponde ao termo do lado direito da Eq. (4)

Se for adotado um polinômio constante dentro do pixel girado i.e. grau do polinômio é igual a zero e assim $v(s_j) = \text{constante}$, obtém-se das Eqs. (4-6) a seguinte formulação discretizada

achar $\phi_j|_{n_j,m_j}$ tal que

$$\phi_j|_{n_j,m_j+1} - \phi_j|_{n_j,m_j} + \phi_j|_{n_j,m_j+1} \sum_{e \in K_{n_j,m_j}^j} (\sigma_{a,e} + \sigma_{s,e}) a_e = \sum_{e \in K_{n_j,m_j}^j} \sigma_{s,e} a_e \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}$$

$j = 1, \dots, 2J, n_j, m_j = 1, \dots, 2M,$ (7)

$$\phi_j|_{n_j, m_j=1} = \phi_{j,n_j}^{in} \quad (8)$$

onde a_e é a área do elemento e , e usamos uma aproximação para adiante para a radiança na direção k . Para a solução do problema direto da radiança usa-se um procedimento iterativo marchante ao longo de cada faixa R_{j,n_j} , começando na fronteira entrante $\partial R_{j,n_j}^-$ com a informação dada pela Eq. (8). As intensidades de radiação no segundo termo no lado esquerdo da Eq. (7), são tomados na iteração anterior. Resulta então

$$\phi_j|_{n_j, m_j+1}^{iter+1} = \frac{\phi_j|_{n_j, m_j}^{iter} + \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} \sigma_{s,e} a_e \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}^{iter}}{1 + \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} (\sigma_{a,e} + \sigma_{s,e}) a_e}$$

$\forall j = 1, \dots, 2J, n_j, m_j = 1, \dots, 2M,$ (9)

Usando a Eq. (9) a solução do problema direto da radiança é obtida simplesmente marchando ao longo das direções $\vec{\Omega}_j$ para cada faixa R_{j,n_j} , com $j = 1, 2, \dots, 2J, n_j = 1, 2, \dots, 2M$ e $m_j = 1, 2, \dots, 2M$, começando em $\partial R_{j,n_j}^-$ onde as condições de fronteira são conhecidas.

Este procedimento é repetido até a convergência nos valores calculados para a intensidade da radiação.

Para obter a equação inversa de transporte discretizada (Discrete Inverse Transport Equation) Integra-se a Eq. (9) ao longo da faixa R_{j,n_j} , com $m_j=1, 2, \dots, 2M$

$$\phi_j|_{n_j, 2M+1} - \phi_j|_{n_j, 1} = - \sum_{m_j=1}^{2M} \phi_j|_{n_j, m_j+1} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} (\sigma_{a,e} + \sigma_{s,e}) a_e + \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} \sigma_{s,e} a_e \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}$$

$j = 1, 2, \dots, 2J$ e $n_j = 1, 2, \dots, 2M$ (10)

Uma formulação logarítmica do problema inverso de transferência pode ser formulada igualmente

$$\ln\left(\frac{\phi_j|_{n_j, 2M+1}}{\phi_j|_{n_j, 1}}\right) = - \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} (\sigma_{a,e} + \sigma_{s,e}) a_e + \sum_{m_j=1}^{2M} \frac{1}{\phi_j|_{n_j, m_j+1}} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} \sigma_{s,e} a_e \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}$$

$j = 1, 2, \dots, 2J$ e $n_j = 1, 2, \dots, 2M$ (11)

Obtendo-se equações onde o lado direito é conhecido (radiança sainte e a entrante) e no lado esquerdo os coeficientes de absorção e de espalhamento a ser determinadas. Em ambos os casos (Eqs. 10, 11) o algoritmo *rs-ART* obtido por Berrocal Tito et al. [6, 7] pode ser usado para a solução do problema inverso.

Uma aproximação pode ser feita nas Eqs. (10, 11) quando o coeficiente de absorção seja desprezível ou muito menor que o coeficiente de espalhamento

$$\begin{aligned} \phi_j|_{n_j, m_j+1} - \phi_j|_{n_j, m_j} &= \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} [-\phi_j|_{n_j, m_j+1} \\ &+ \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}] \sigma_{s,e} a_e \\ j &= 1, 2, \dots, 2J \text{ e } n_j = 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (12)$$

ou

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\phi_j|_{n_j, 2M+1}}{\phi_j|_{n_j, 1}}\right) &= \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} [-1 \\ &+ \frac{1}{\phi_j|_{n_j, m_j+1}} \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}] \sigma_{s,e} a_e \\ j &= 1, 2, \dots, 2J \text{ e } n_j = 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (13)$$

Resultando em um problema do tipo tomografia de transmissão (lado direito conhecido) para o coeficiente de espalhamento. Em ambos os casos (Eqs. 12 ou 13)) o algoritmo *rs*-ART pode ser usado para a solução deste problema inverso.

Agora usando a estimativa do coeficiente de espalhamento nas Eqs. (10 ou 11) pode-se fazer uma estimativa do coeficiente de absorção que é muito pequeno, obtendo-se

$$\begin{aligned} \phi_j|_{n_j, 2M+1} - \phi_j|_{n_j, 1} &+ \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} [\phi_j|_{n_j, m_j+1} \\ &- \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}] \sigma_{s,e} a_e = - \sum_{m_j=1}^{2M} \phi_j|_{n_j, m_j} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} \sigma_{a,e} a_e \\ j &= 1, 2, \dots, 2J \text{ e } n_j = 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (14)$$

ou

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\phi_j|_{n_j, 2M+1}}{\phi_j|_{n_j, 1}}\right) &+ \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} [1 \\ &- \sum_{k=1}^{2J} p_{kj} \frac{\phi_k|_{n_k^e, m_k^e+1}}{\phi_j|_{n_j, m_j+1}}] \sigma_{s,e} a_e = \sum_{m_j=1}^{2M} \sum_{e \in K_{n_j, m_j}^j} \sigma_{s,e} a_e \\ j &= 1, 2, \dots, 2J \text{ e } n_j = 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (15)$$

Onde o lado direito das Eqs. (14, 15) são conhecidas, ie resulta um problema tipo tomografia, que pode ser resolvido com o algoritmo *rs*-ART.

Referências

- [1] A.D. Klose, e A. H. Hielscher, Optical Tomography Using The Time-Independent Equation of Radiative Transfer- Part 2: Inverse Model, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 72 (2002) 715-732.
- [2] J.J. DUDERSTADT, e W.R. MARTIN, *Transport Theory*, John Wiley & Sons, 1979.
- [3] A.D. Klose, et al., Optical Tomography Using the Time-Independent Equation of Radiative transfer – Part 1: Forward Model, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 72 (2002) 691-713.
- [4] R.F. Carita Montero, et. al, Solution of the 2-D Transport Equation Using a Domain Partition Consistent with a New Discrete Ordinate Method and Discontinuous Finite Element, (2005) *em preparação*.
- [5] R.F. Carita Montero, N.C. Roberty e A.J. Silva Neto, Reconstruction of a Combination of the Absorption and Scattering Coefficients with a Discrete Ordinates Method Consistent with the Source - Detector System, *Inverse Problems in Engineering*, 12 (2004) 81-101.
- [6] M.J. Berrocal Tito, et al., Estudo dos Valores Iniciais para Algoritmos Baseados na Distancia de Bregman na Solução de Problemas Inversos de Transferência Radiativa 1D, *CNMAC, Congresso Nacional de matemática Aplicada e Computacional*, (2005).
- [7] M.J. Berrocal Tito, R.F. Carita Montero e N.C. Roberty, Applications of special Cases of the Measure of Csizár in an Inverse Problem of Radiative Transfer, *1rs LMCC Meeting on computational Modeling*, (2004)