

Análise de Pontos de Equilíbrio do Movimento Rotacional de Satélites Artificiais, com Torque de Gradiente de Gravidade

Regina Elaine Santos Cabette

Engenharia e Tecnologia Espaciais – DMC
INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
São José dos Campos – SP
recabette@uol.com.br

Maria Cecília F. P. S. Zanardi, Rodolpho Vilhena de Moraes

Departamento de Matemática
UNESP – Campus de Guaratinguetá – SP
cecilia@feg.unesp.br
rodolpho@feg.unesp.br

O trabalho apresenta uma análise da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais na presença de torques externos. As equações do movimento rotacional são descritas em formalismo Hamiltoniano, utilizando um conjunto de variáveis canônicas, incluindo o torque de gradiente de gravidade. Um dos processos que nos permite analisar a estabilidade deste sistema necessita da redução da Hamiltoniana, associada ao movimento, a sua forma normal. A forma normal proposta para sistemas dinâmicos Hamiltonianos, é feita através de uma substituição canônica linear, que normaliza a parte quadrática da função Hamiltoniana, para em seguida, estender aos demais termos. A partir da forma normal da Hamiltoniana, uma teoria de estabilidade é aplicada ao ponto de equilíbrio do problema. Esta teoria é baseada nos autovalores da equação característica do sistema linearizado e em coeficientes da forma normal da Hamiltoniana. Na aplicação realizada o ponto de equilíbrio mostrou-se estável.

Introdução

O movimento de um satélite artificial em torno da Terra é caracterizado pelo seu movimento translacional e rotacional. A análise do comportamento destes movimentos é muito importante, pois é a partir da orientação e do posicionamento precisos do satélite que a missão poderá obter sucesso.

O trabalho trata de um problema associado ao movimento rotacional de um satélite artificial que deverá apontar uma resposta para a estabilidade do movimento dentro de condições impostas.

A parcela associada ao torque de gradiente de gravidade é incluída nas equações do movimento

utilizando a forma canônica das equações do movimento rotacional para torque conservativos. É feita uma análise da estabilidade para o movimento rotacional perturbado.

Equações do Movimento

Utilizando o formalismo Hamiltoniano, as variáveis de Andoyer caracterizam o movimento do satélite em torno de seu centro de massa e as variáveis de Delaunay descrevem o movimento do centro de massa do satélite em torno da Terra, o qual é admitido conhecido.

Nas equações do movimento rotacional do satélite artificial é incluída a parcela associada ao gradiente de gravidade com o satélite suposto simétrico, o que corresponde a dois momentos principais de inércia iguais ($A = B$).

Deste modo, com o formalismo Hamiltoniano, as equações do movimento rotacional são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i} \\ \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l_i} \end{cases} \quad (i = 2, 3)$$

em que: L_i , l_i são as variáveis de Andoyer e F é a Hamiltoniana do problema.

A Hamiltoniana do problema em estudo, em termos das variáveis de Andoyer e de Delaunay, é expressa por:

$$F(L_1, L_2, L_3, l_2, l_3, L, G, H, l, g, h) = F_0(L, L_1, L_2) + F_1(L_1, L_2, L_3, l_2, l_3, L, G, H, l, g, h)$$

em que: L_1, L_2, L_3, l_2, l_3 variáveis de Andoyer;
 L, G, H, I, g, h variáveis de Delaunay.

$$\begin{aligned}
F_0 &= -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right] L_1^2 + \frac{1}{A} L_2^2 \right\} \\
F_1 &= \frac{\mu^4 M^7}{L^6} \left\{ \frac{C-A}{M} \left\{ (1+3e \cos l) \left[P_2 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \left[-\frac{1}{2} + \right. \right. \right. \right. \right. \\
&+ \frac{3}{8} (1+\theta^2 + \theta_2^2 - 3\theta^2 \theta_2^2) - \frac{3}{8} \sin 2l \sin 2l_2 \cos(h-l_3) + \\
&- \frac{3}{8} \sin^2 l \sin^2 l_2 \cos(2h-2l_3) \left. \right] - \frac{3}{16} (1-3\theta^2) \sin 2l_2 \\
&\sin 2J_2 \cos l_2 + \frac{3}{16} (1-3\theta^2) \sin^2 l_2 \sin^2 J_2 \cos 2l_2 + \\
&+ \sum_{\varepsilon} \frac{3}{16} \sin 2l (1-\varepsilon \theta_2) (1+2\varepsilon \theta_2) \sin 2J_2 \\
&\cos(h-l_3 - \varepsilon l_2) + \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{3}{16} \sin^2 l \sin l_2 (1-\varepsilon \theta_2) \\
&\sin 2J_2 \cos(2h-2l_3 + \varepsilon l_2) - \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{3}{16} \sin 2l \sin l_2 (1-\varepsilon \theta_2) \\
&\sin^2 J_2 \cos(h-l_3 + 2\varepsilon l_2) - \sum_{\varepsilon} \frac{3}{32} \sin^2 l (1-\varepsilon \theta_2)^2 \\
&\sin^2 J_2 \cos(2h-2l_3 + 2\varepsilon l_2) \left. \right\} + \\
&+ P_2 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \left\{ \frac{3}{8} \sin^2 l (1-3\theta^2) \right. \\
&\left[\cos(2l+2g) + e \left[-\frac{1}{2} \cos(l+2g) + \frac{7}{2} \cos(3l+2g) \right] \right. \left. \right] + \\
&+ \sum_{\varepsilon} \varepsilon \frac{3}{8} \sin l (1+\varepsilon \theta) \sin l_2 \left[\cos[2l+2g+\varepsilon(h-l_3)] + \right. \\
&e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon(h-l_3)] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon(h-l_3)] \right] \right. \left. \right] + \\
&- \sum_{\varepsilon} \frac{3}{16} (1+\varepsilon \theta)^2 \sin^2 l_2 \left[\cos[2l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)] + \right. \\
&+ e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)] \right] \right. \left. \right] \left. \right\} + \\
&+ \sum_{\varepsilon} \frac{9}{32} \sin^2 l \sin 2l_2 \sin 2J_2 \\
&\left\{ \cos[2l+2g+\varepsilon l_2] + e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon l_3] + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon l_3] \right] \right. \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \sum_{\varepsilon \delta} \varepsilon \frac{3}{16} \sin l (1+\varepsilon \theta) (1-\delta \theta_2) (1+2\delta \theta_2) \\
&\sin 2J_2 \left\{ \cos[2l+2g+\varepsilon(h-l_3)+\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon(h-l_3)+\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon(h-l_3)+\varepsilon \delta l_2] \right] \right. \left. \right\} + \\
&+ \sum_{\varepsilon \delta} \delta \frac{3}{32} \sin l_2 (1+\varepsilon \theta)^2 (1-\delta \theta_2) \\
&\sin 2J_2 \left\{ \cos[2l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)+\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)+\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)+\varepsilon \delta l_2] \right] \right. \left. \right\} + \\
&- \sum_{\varepsilon} \frac{9}{32} \sin^2 l \sin^2 l_2 \sin^2 J_2 \left\{ \cos[2l+2g+2\varepsilon l_2] + \right. \\
&+ e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+2\varepsilon l_2] + \frac{7}{2} \cos[3l+2g+2\varepsilon l_2] \right. \left. \right] \left. \right\} + \\
&+ \sum_{\varepsilon \delta} \varepsilon \delta \frac{3}{16} \sin l (1+\varepsilon \theta) \sin l_2 \\
&(1-\delta \theta_2) \sin^2 J_2 \left\{ \cos[2l+2g+\varepsilon(h-l_3)+2\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon(h-l_3)+2\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon(h-l_3)+2\varepsilon \delta l_2] \right] \right. \left. \right\} + \\
&- \sum_{\varepsilon \delta} \frac{3}{64} (1-\varepsilon \theta)^2 (1-\delta \theta_2)^2 \sin^2 J_2 \\
&\left\{ \cos[2l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)+2\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ e \left[-\frac{1}{2} \cos[l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)+2\varepsilon \delta l_2] + \right. \\
&+ \left. \left. \frac{7}{2} \cos[3l+2g+\varepsilon(2h-2l_3)+2\varepsilon \delta l_2] \right] \right. \left. \right\} \left. \right\}
\end{aligned}$$

sendo que:

\sum_{ε} e $\sum_{\varepsilon, \delta}$ significam que δ e ε assumem

valores +1 e -1;

M é a massa do satélite;

μ é a constante gravitacional da Terra;

$$\theta = \frac{H}{G} = \cos I;$$

$$\theta_2 = \frac{L_3}{L_2} = \cos I_2;$$

I é a inclinação orbital;

I_2 é a inclinação do plano do momento angular com o plano do Equador;

$P_2\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$ é o polinômio de Legendre;

e é a excentricidade da órbita do satélite;
 J_2 é a inclinação do equador do satélite com relação ao plano do momento angular de rotação;

Teorema de Estabilidade

Seja a Hamiltoniana F uma função analítica de coordenadas e momentos para o ponto P , e sendo a Hamiltoniana H^0 para o sistema reduzido a forma normal satisfaz as seguintes condições:

- a) Os autovalores do sistema linear reduzido são imaginários puros $\pm i\alpha_1$ e $\pm i\alpha_2$;
- b) A condição $k_1\alpha_1^0 + k_2\alpha_2^0 \neq 0$ válida para todo k_1 e k_2 inteiros satisfazendo a desigualdade $|k_1| + |k_2| \leq 4$;
- c) $D^0 = -\left(\beta_{11}^0\alpha_2^0 - 2\beta_{12}^0\alpha_1^0\alpha_2^0 + \beta_{22}^0\alpha_1^0\alpha_2^0\right) \neq 0$,

onde $\beta_{\nu\mu}^0$ são os coeficientes de quarta ordem da Hamiltoniana H^0 , escrita da seguinte maneira em forma normal:

$$H^0 = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\alpha_\nu^0}{2} R_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^2 \frac{\beta_{\nu\mu}^0}{4} R_\nu R_\mu + O_5,$$

$$R_\nu = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2$$

então o movimento é Liapunov Estável.

Forma Normal para Sistemas Hamiltonianos

Introduzindo o vetor de estado w e o vetor das derivadas H_w :

$$w = \begin{bmatrix} L_2 \\ L_3 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}, \quad H_w = \begin{bmatrix} F_{L_2} \\ F_{L_3} \\ F_{l_2} \\ F_{l_3} \end{bmatrix}$$

as equações do movimento podem ser descritas da seguinte forma:

$$\dot{w} = JH_w$$

sendo J matriz simplética de $2n$ filas dada por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem 4.

Notamos que a Hamiltoniana do problema em questão não se apresenta na forma de polinômios. Portanto o primeiro passo é expandi-la em série de Taylor, obtendo assim uma série de potências na forma $F(L_i, l_i) = F_2(L_i, l_i) + F_3(L_i, l_i) + F_4(L_i, l_i) + \dots$ com grau de liberdade n , em que $F_2(L_i, l_i)$ é a parte quadrática da Hamiltoniana.

$$F_2 = (1/2) \left(a_{11}L_2^2 + a_{22}L_3^2 + a_{33}l_2^2 + a_{44}l_3^2 + a_{12}L_2L_3 + a_{13}L_2l_2 + a_{14}L_2l_3 + a_{23}L_3l_2 + a_{24}L_3l_3 + a_{34}l_2l_3 \right)$$

Considerando-se a Hessiana da Hamiltoniana F , o sistema pode ser escrito na forma :

$$\dot{w} = JGw$$

com a Hessiana G dada por:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial L_2^2} = a_{11} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial L_3} = a_{12} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_2} = a_{13} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_2 \partial l_3} = a_{14} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial L_2} = a_{21} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3^2} = a_{22} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_2} = a_{23} & \frac{\partial^2 F}{\partial L_3 \partial l_3} = a_{24} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_2} = a_{31} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial L_3} = a_{32} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2^2} = a_{33} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_2 \partial l_3} = a_{34} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_2} = a_{41} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial L_3} = a_{42} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3 \partial l_2} = a_{43} & \frac{\partial^2 F}{\partial l_3^2} = a_{44} \end{pmatrix}$$

A matriz JG deve ser diagonalizada e sua equação característica pode ser obtida:

$$\text{Det} [\lambda I_n - JG] = 0$$

sendo expressa da seguinte forma:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_4 = 0$$

em que

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_2 = -a_{13}^2 + a_{44}a_{22} - 2a_{14}a_{23} + 2a_{12}a_{34} + a_{11}a_{33} - a_{24}^2$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & -a_{11}a_{44}a_{23}^2 + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{12}^2a_{34}^2 + \\ & - a_{14}^2a_{22}a_{33} - a_{12}^2a_{33}a_{44} + 2a_{12}a_{13}a_{44}a_{23} + \\ & + a_{11}a_{33}a_{24}^2 + 2a_{14}a_{12}a_{24}a_{23} - 2a_{14}a_{13}a_{24}a_{23} + \\ & + 2a_{13}a_{22}a_{14}a_{34} - 2a_{13}a_{12}a_{34}a_{24} + \\ & + 2a_{11}a_{23}a_{24}a_{34} - a_{11}a_{22}a_{34}^2 - a_{44}a_{22}a_{13}^2 + \\ & + a_{24}^2a_{13}a_{14}a_{23}^2 \end{aligned}$$

O polinômio característico é uma função par, visto que os coeficientes α_3 e α_1 são nulos, assim se λ é uma raiz característica deste polinômio tem-se que $-\lambda$ também é, com a mesma multiplicidade.

Com a diagonalização de JG, faz-se uma transformação de coordenadas, de modo que encontramos F_2 em forma normal:

$$F_2(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i (q_i^2 + p_i^2)$$

Define-se uma transformação de coordenadas complexas de maneira que F_2 finalmente apresenta a forma normal esperada.

$$F_2(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^2 \bar{\lambda}_k x_k y_k \dots$$

$$F_2 = \alpha_1^0 x_1 y_1 + \alpha_2^0 x_2 y_2$$

Estendendo o processo aos termos de ordens superiores $F_3, F_4 \dots$ podemos encontrar a forma normal completa até a ordem desejada.

$$\begin{aligned} F_4 = & \beta_{12}^0 (x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2) + \\ & + \beta_{11}^0 (x_1^4 + y_1^4 + 2x_1^2 y_1^2) + \\ & + \beta_{22}^0 (x_2^4 + y_2^4 + 2x_2^2 y_2^2) \end{aligned}$$

Assim podemos verificar a estabilidade do movimento rotacional para os pontos de equilíbrio encontrados.

Pontos de Equilíbrio

Considerando condições particulares para as variáveis de Andoyer e de Delaunay para um satélite simétrico.

Dados orbitais e geométricos

$$\mu = 3,986003 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

$$l = 0,5533 \text{ rad}$$

$$e = 0,01617$$

$$a = 6,95964 \times 10^3 \text{ km}$$

$$M = 11550 \text{ kg}$$

$$A = B = 1,0307 \times 10^{-1} \text{ kg km}^2$$

$$C = 3,9499 \times 10^{-1} \text{ kg km}^2$$

Variáveis de Andoyer (Pontos de Equilíbrio)

$$L_1 = -5.1699491 82527 \times 10^{-04} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}$$

$$L_2 = 7.5190812 623841 \times 10^{-04} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}$$

$$L_3 = -5.40661562 0528 \times 10^{-04} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}$$

$$l_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$l_2 = 7.85566178 6621 \times 10^{-01} \text{ rad}$$

$$l_3 = -5.5402778 35686 \times 10^{-01} \text{ rad}$$

Variáveis de Delaunay

$$L = \sqrt{\mu a} \quad l = 0$$

$$G = L\sqrt{1 - e^2} \quad g = 0$$

$$H = G \cos I \quad h = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

A primeira condição é satisfeita, já que os autovalores são imaginários puros.

Com a obtenção da Forma Normal até 4ª ordem, identificamos os coeficientes $\beta_{\nu\mu}^0$ e α_{ν}^0 necessários para verificar se as outras duas condições impostas pelo teorema de estabilidade estão satisfeitas. Assim analisamos a estabilidade do movimento rotacional com o gradiente de gravidade, verificando que para os pontos de equilíbrio em questão temos um movimento ESTÁVEL.

Para o caso em questão, a obtenção da forma normal até 4ª ordem foi suficiente para analisarmos a estabilidade, não sendo necessário encontrar ordens superiores.

Referências Bibliográficas

[1] ZANARDI, M. C.; Study of the Terms of a Coupling Between Rotational and Translational Motions, *Celestial Mechanics*, vol. 39, 1986, pp. 147-158.

[2] COSTA FILHO, O.; Uma Forma Normal para Sistemas Dinâmicos Hamiltonianos, Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Vol. 1, 2002, pp. 211-234.

[3] KOVALEV, A. M. ; SAVCHENKO, A. I.: Stability of Uniform Rotations of a rigid Body about a Principal Axis ", PMN – Journal of Applied Mathematics and Mechanics, v. 39, nº. 4, p. 650-660, 1975.

[4] A. Lacerda Machuy Francisco; Cálculo Efetivo da Forma Normal Parcial para o Problema de Hill, Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, Brasil, 2001, 71p.

[5] T. J. STUCHI: Kam Tori in the Center Manifold of the 3-D Hill Problem, Advances in Space Dynamics, v. 2, p. 112-127, 2002.