

# Solvabilidade, Decaimento Exponencial e Análise Numérica Para Um Sistema de EDP Não Linear Acoplado

Renato Fabrício Costa Lobato<sup>\*</sup>

Jorge Ferreira<sup>†</sup>

CCEN-UFPA-PPGME,

66075-110, Belém, PA

E-mail: costalobato@bol.com.br , jf@ufpa.br

João dos Santos Protázio<sup>‡</sup> Carlos Alberto Raposo da Cunha

UFPA/ESMAC - Universidade Federal do Pará / Escola de Ensino Superior Madre Celeste

E-mail: protazio@ufpa.br, raposo@ufs.edu.br.

DMATE/UFESJ - Universidade Federal de São João Del-Rei

## 1 Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a existência, unicidade de solução global fraca, decaimento exponencial e análise numérica para o sistema acoplado não linear (P) da seguinte forma:

$$(P) \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f(v) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ v_t - a(l(v))\Delta v = f(u) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = v = 0 & \text{sobre } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

O problema (P) descreve diversos problemas que aparecem em várias situações físicas. Por exemplo quando queremos estudar a questão relacionada com a cultura de bactérias  $u$  pode descrever a população dessas bactérias sujeita ao espalhamento onde o coeficiente de difusão  $a$  é suposto dependente da população inteira.

## 2 Hipóteses

Aqui  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  bem regular

(H.1)  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que

$0 < m \leq a(t) \leq M$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 > \frac{\gamma}{m}$

Sendo  $\lambda_1$  o primeiro autovalor do operador  $-\Delta$

(H.2) Existe  $\gamma > 0$  tal que  $|f(s) - f(t)| \leq \gamma|s - t|$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  e  $f(0) = 0$

(H.3)  $l : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma linear e contínua, isto é,  $\exists g \in L^2(\Omega)$  tal que

$$l(u) = l_g(u) = \int_{\Omega} g(x)u(x)dx \quad \forall u \in L^2(\Omega)$$

Agora estamos em condições de enunciarmos nossos resultados

<sup>\*</sup> Aluno do programa de pós-graduação em Matemática e Estatística

<sup>†</sup> Co-orientador do mestrado

<sup>‡</sup> Orientador do mestrado

## 3 Existência de Solução Fraca

**Teorema 1** Se  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, são válidas as hipóteses (H.1), (H.2) e (H.3) e  $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , então existe um par de funções  $(u, v)$  tais que:

$$\begin{aligned} (u, v) &\in [L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, \infty); L^2(\Omega))]^2 \\ (u_t, v_t) &\in (L^2(0, \infty, H^{-1}(\Omega)))^2 \\ u(0) &= u_0 \\ v(0) &= v_0 \\ \frac{d}{dt}(u, w_1) + a(l(u)) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_1 dx &= \int_{\Omega} f(v)w_1 dx \quad \forall w_1 \in H_0^1(\Omega) \quad \Omega \text{ no sentido de } D'(0, \infty) \\ \frac{d}{dt}(v, w_2) + a(l(v)) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w_2 dx &= \int_{\Omega} f(u)w_2 dx \quad \forall w_2 \in H_0^1(\Omega) \quad \Omega \text{ no sentido de } D'(0, \infty) \end{aligned}$$

Aqui estamos considerando  $H^{-1}(\Omega)$  o dual topológico do  $H_0^1(\Omega)$

Idéia da prova:

Usamos o método de Faedo Galerking, estimativas a priori não usuais, o teorema da compacidade de Aubin-Lions.

## 4 Unicidade da Solução Fraca

**Teorema 2:** Suponha que  $a$  é uma função contínua e lipschitziana, isto é,  $\exists B$  constante tal que:

$$|a(t) - a(t')| \leq B|t - t'| \quad \text{para todo } t, t' \in \mathbb{R}$$

Para  $g \in L^2(\Omega)$  seja

$$l(u) = l_g(u) = \int_{\Omega} g(x)u(x)dx$$

Além disso assumimos que (H.1), (H.2) e (H.3) se verificam. Então o problema (P) tem uma única solução

Demonstração: Aplicamos o método da energia

## 5 Comportamento Assintótico

**Teorema 3:** Assumimos que as condições do teorema 1 sejam válidas.

Para cada  $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  a solução de:

$$(P) \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f(v) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ v_t - a(l(v))\Delta v = f(u) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = v = 0 & \text{sobre } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t)\|_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|v(x, t)\|_2$$

e

$$\|u(x, t)\|_2 \leq |u_0| e^{-(m\lambda_1 - \gamma)t} \quad 0 < t < \infty$$

$$\|v(x, t)\|_2 \leq |v_0| e^{-(m\lambda_1 - \gamma)t} \quad 0 < t < \infty$$

Demonstração: Basta usar o teorema 3

## 6 Análise Numérica

Os resultados no que diz respeito a análise numérica do sistema não-linear  $(P)$  estão em fase final de elaboração e pretendemos apresentá-los no próximo CNMAC.

### Referências

- [1] F.J.S.A Corrêa, Silvano D.B. Menezes, J. Ferreira, On a class of problems involving a non-local operator, Communications on Applied Mathematics and Computation 147 (2004) 475-489
- [2] M. Chipot, J.F. Rodrigues, On a Class of non-local nonlinear problems, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 26 (3) (1992) 447-448
- [3] M. Chipot, B. Lovat, Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 30 (7) (1997) 4619-4627
- [4] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.
- [5] J.M. Rivera, Tópicos em Termoelasticidade e Viscoelasticidade, Monografias do LNCC-CNPq, Série Estudos Avançados, 1997