

Condições para a existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros para estabilidade de sistemas lineares incertos ^{*}

Ricardo C. L. F. Oliveira

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

CP 6101, 13081-970, Campinas - SP

E-mails: {ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br

Resumo – Este trabalho trata do problema de análise de estabilidade de sistemas lineares incertos descritos na forma politópica através do uso de funções de Lyapunov quadráticas que dependem linearmente dos parâmetros incertos. É proposto um procedimento sistemático para gerar famílias de testes de estabilidade, que se verificados, fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que garante a estabilidade de todo o domínio de incerteza. A cada passo, um conjunto de condições baseadas em desigualdades matriciais lineares fornecem condições suficientes para a existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente do parâmetro que garante a estabilidade. A necessidade é atingida assintoticamente através de uma relaxação baseada na generalização do Teorema de Pólya para o caso de funções polinomiais com coeficientes matriciais. Sistemas contínuos no tempo são abordados, como demonstrado através de exemplos numéricos.

1 Introdução

A estabilidade de conjuntos compactos é um assunto que há tempos vem recebendo grandes esforços de pesquisa principalmente por apresentar uma vasta gama de aplicações em áreas como álgebra linear e sistemas de controle. Uma atenção especial tem sido dedicada à investigação da estabilidade Hurwitz e Schur de politopos de matrizes usando a teoria de Lyapunov, que tem fornecido ferramentas numéricas eficientes e pode ser facilmente estendida para tratar uma grande variedade de problemas similares. Por meio desta abordagem, a estabilidade de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser atestada por meio de uma função de Lyapunov $v(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (usualmente quadrática em x) tal que $v(x) > 0$ e $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. A análise da estabilidade de matrizes pertencentes a conjuntos compactos permite inferir sobre a estabilidade de sistemas lineares descritos por equações diferenciais ou a diferenças em termos das variáveis de estado.

O uso de funções de Lyapunov para avaliar a estabilidade de um politopo de matrizes permite que procedimentos de otimização possam ser expressados na forma de desigualdades matriciais lineares (em inglês, “*Linear Matrix Inequalities*” – LMIs). Dentro da abordagem LMI, a estabilidade pode ser verificada através de problemas de otimização convexos que podem ser resolvidos de maneira eficiente por algoritmos de tempo polinomial [6], [16]. A estabilidade quadrática, i.e., o uso de

uma função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$, sendo P uma matriz simétrica definida positiva fixa que não depende da incerteza, fornece uma condição suficiente simples em termos de um conjunto de LMIs descritas somente nos vértices do politopo. A existência de uma solução factível garante a estabilidade de todo o domínio de incerteza. Em sistemas de controle, a estabilidade quadrática tem sido usada como o ponto de partida para tratar de diversos problemas como controle e filtragem robusta incluindo critérios como \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (veja [2] e referências). Os resultados baseados na estabilidade quadrática são especialmente adequados para tratar de sistemas cujos parâmetros incertos variam no tempo. No contexto de sistemas com parâmetros incertos invariantes no tempo, os resultados podem ser muito conservadores.

Funções de Lyapunov que dependem linearmente dos parâmetros incertos $v(x) = x'P(\alpha)x$, sendo que $P(\alpha)$ depende de forma linear em α , têm sido usadas para reduzir o conservadorismo na avaliação da estabilidade de politopos de matrizes. Em [7], a factibilidade de um conjunto de LMIs com variáveis extras fornece um conjunto de matrizes de Lyapunov cuja combinação convexa garante a estabilidade Hurwitz do politopo. O caso Schur é apresentado em [4] e a generalização para tratar da estabilidade de qualquer região convexa no plano complexo é apresentada em [10].

Explorando a estrutura algébrica da condição de Lyapunov aplicada a uma matriz genérica dentro do politopo, condições suficientes para a existência de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros que garante a estabilidade do politopo são apresen-

^{*}Este trabalho foi parcialmente financiado pelas agências FAPESP e CNPq.

tadas em [12] (caso Schur) e [13] (caso Hurwitz). As condições em [12], [13] são, em geral, menos conservadoras que as condições apresentadas em [4], [7], [10], e todas contêm a estabilidade quadrática como caso particular. Uma comparação numérica entre essas condições pode ser encontrada em [5] e um resultado mais geral pode ser encontrado em [9], que apresenta resultados menos conservadores introduzindo variáveis extras que também dependem linearmente dos parâmetros.

O objetivo deste trabalho é investigar a estabilidade Hurwitz de um politopo de matrizes através da existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros. Usando o resultado de [13] como ponto de partida é definida uma família de LMIs de precisão crescente que fornece resultados cada vez menos conservadores. O número de variáveis de decisão permanece constante, sendo determinado pelo número de vértices do politopo e pela ordem das matrizes, e o número de LMIs aumenta a cada passo. Sempre que uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros existe, a necessidade é atingida através do procedimento de relaxação proposto. As condições propostas podem ser vistas como uma extensão do Teorema de Pólya aplicado a funções polinomiais com coeficientes matriciais [8]. Esta estratégia foi usada em [15], [14] para análise de estabilidade e em outros contextos envolvendo programação copositiva (veja [3]). Os resultados são ilustrados por meio de exemplos numéricos.

2 Notação

O símbolo ($'$) indica transposição; $P > 0$ (≥ 0) significa que P é simétrica (semi) definida positiva. $\lambda_{max}(P)$ indica o máximo e $\lambda_{min}(P)$ o mínimo autovalor da matriz P . \mathbb{R} representa o conjunto dos números reais, \mathbb{Z}_+ o conjunto dos inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$ e $M!$ denota fatorial, i.e. $M! = M(M-1)(M-2)\cdots(2)(1)$ para $M \in \mathbb{Z}_+$ com $0! = 1$. N é usado para indicar o número de vértices de um politopo e também a dimensão do vetor α associado a uma matriz genérica dentro do politopo.

3 Preliminares

Considere o politopo de matrizes reais definido por

$$\mathcal{A} \triangleq \left\{ A(\alpha) : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i ; \alpha \in \Delta_N \right\} \quad (1)$$

sendo N o número de vértices e Δ_N representado o simplex unitário, i.e.

$$\Delta_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N ; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 ; \alpha_i \geq 0 \right\}$$

O objetivo deste trabalho é fornecer condições necessárias e suficientes computacionalmente verificáveis tais que uma matriz de Lyapunov simétrica definida positiva que depende linearmente dos parâmetros dada por

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i ; \alpha \in \Delta_N \quad (2)$$

com $P_i = P_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$ a serem determinadas, garante a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} através do uso da função de Lyapunov $v(x) = x'P(\alpha)x$.

O próximo lema fornece condições necessárias e suficientes para a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} em termos de uma função de Lyapunov que depende de maneira genérica dos parâmetros $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$. Entretanto, as condições devem ser satisfeitas para todo $\alpha \in \Delta_N$, resultando em um problema de dimensão infinita.

Lema 1 *O conjunto \mathcal{A} é Hurwitz estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva que depende de forma arbitrária dos parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que uma das seguintes condições equivalentes são satisfeitas $\forall \alpha \in \Delta_N$:*

$$(a) \Gamma(\alpha) \triangleq A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

$$(b) \Gamma_d(\alpha) \triangleq (\alpha_1 + \dots + \alpha_N)^d \Gamma(\alpha) < 0 ; \quad \forall d \in \mathbb{Z}_+$$

A condição (a) é obtida diretamente por meio do uso de $v(x) = x'P(\alpha)x$ como uma função de Lyapunov associada à equação diferencial $\dot{x} = A(\alpha)x$. Para qualquer $\alpha \in \Delta_N$ fixo e para todo $d \in \mathbb{Z}_+$, a equivalência entre (a) e (b) é imediata pois $\alpha \in \Delta_N$ implica que $(\sum_{i=1}^N \alpha_i)^d = 1$ para todo $d \in \mathbb{Z}_+$. Note que $P(\alpha)$ no Lema 1 não tem uma estrutura especial e a verificação da estabilidade é baseada na existência de uma matriz de Lyapunov definida positiva para qualquer escolha de $\alpha \in \Delta_N$, que é um resultado bem conhecido.

Por exemplo, impondo $P(\alpha) = P$ na condição (a) do Lema 1, tem-se a condição de estabilidade quadrática. Entretanto, a estabilidade quadrática é somente uma condição suficiente para estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} .

O objetivo principal neste artigo é investigar condições necessárias e suficientes para a existência de $P(\alpha)$ dada por (2), uma classe de funções de Lyapunov que fornece resultados menos conservadores para a análise de estabilidade \mathcal{A} do que a estabilidade quadrática. As propriedades algébricas da condição (b) do Lema 1, que define uma família de polinômios cujo número de monômios é parametrizado por $d \in \mathbb{Z}_+$, serão usadas para fornecer uma caracterização completa da existência de $P(\alpha)$ dada por (2) garantindo a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} em termos de LMIs formuladas nos vértices de \mathcal{A} .

Antes de apresentar os resultados principais, algumas definições e resultados preliminares são ne-

cessários. Define-se $\mathcal{K}(d)$ como o conjunto das N -uplas obtidas como todas as possíveis combinações de $k_1 k_2 \cdots k_N$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, N$ tais que $k_1 + k_2 + \cdots + k_N = d$. $\mathcal{K}_\ell(d)$ é a ℓ -ésima N -upla de $\mathcal{K}(d)$ que é ordenado lexicamente, $\ell = 1, \dots, J(d)$. Para um N fixo, o número de elementos em $\mathcal{K}(d)$ é dado por $J(d) = (N + d - 1)! / (d!(N - 1)!)$ e os coeficientes multinomiais padrões são $\mathcal{C}^\ell(d) = d! / (k_1! k_2! \cdots k_N!)$, $k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d)$, $\ell = 1, \dots, J(d)$. Como exemplo, considere $N = 3$ e $d = 2$, que fornece $J(2) = 6$, $\mathcal{K}(2) = \{002, 011, 020, 101, 110, 200\}$ e os coeficientes $\mathcal{C}^\ell(d) = \{1, 2, 1, 2, 2, 1\}$.

Considere também os coeficientes multinomiais modificados usados neste trabalho: $\mathcal{C}_i^\ell(d, a) = d! / (k_1! \cdots (k_i - a)! \cdots k_N!)$, se $k_i - a \in \mathbb{Z}_+$, ou 0 caso contrário; $\mathcal{C}_{ij}^\ell(d, a, b) = d! / (k_1! \cdots (k_i - a)! \cdots (k_j - b)! \cdots k_N!)$, se $k_i - a \in \mathbb{Z}_+$, $k_j - b \in \mathbb{Z}_+$, ou 0 caso contrário; $\mathcal{C}_{ij\ell}^\ell(d, a, b, c) = d! / (k_1! \cdots (k_i - a)! \cdots (k_j - b)! \cdots (k_\ell - c)! \cdots k_N!)$, se $k_i - a \in \mathbb{Z}_+$, $k_j - b \in \mathbb{Z}_+$, $k_\ell - c \in \mathbb{Z}_+$, ou 0 caso contrário, todos dependendo de $k_1 k_2 \cdots k_n = \mathcal{K}_\ell(d)$, $\ell = 1, \dots, J(d)$.

O próximo teorema é conhecido na literatura como Teorema de Pólya [8].

Teorema 1 *Seja $F(\alpha) \triangleq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ um polinômio homogêneo real que é positivo $\forall \alpha \in \Delta_N$. Então para um $d \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande, o produto*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d F(\alpha)$$

tem todos seus coeficientes estritamente positivos.

Recentemente, um limitante para o valor de d , mais preciso que outros resultados da literatura, foi apresentando em [11].

Teorema 2 *Seja*

$$F(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(g)} \mathcal{C}^\ell(g) \beta_\ell \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N};$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(g)$$

uma função polinomial homogênea de grau g que é positiva em Δ_N . O polinômio

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)^d F(\alpha)$$

tem coeficientes positivos se

$$d > \frac{g(g-1)L}{2\kappa} - g$$

sendo que

$$L = \max\{|\beta_\ell|, \ell = 1, \dots, J(g)\};$$

$$\kappa = \min_{\alpha \in \Delta_N} F(\alpha)$$

Na próxima seção, os principais resultados deste trabalho são apresentados. A prova da convergência assintótica para a necessidade é baseada na generalização do Teorema 2 para o caso de funções polinomiais homogêneas com coeficientes matriciais.

4 Resultados Principais

Nesta seção é mostrado como construir uma seqüência de condições LMI de precisão crescente de modo a assegurar a existência de uma matriz de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros $P(\alpha)$ dada por (2) que garante a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} .

Note que, quando $P(\alpha)$ é dada por (2), o lado esquerdo da condição (a) do Lema 1 pode ser escrito como

$$\Gamma(\alpha) = A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) =$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \underbrace{(A_i'P_i + P_iA_i)}_{T_{H_i}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \underbrace{(A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j)}_{T_{H_{ij}}} \quad (3)$$

Uma maneira simples de garantir a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} pode ser obtida impondo que $P_i = P_i' > 0$ deve ser tal que $T_{H_i} < 0$ e $T_{H_{ij}} < 0$, $i = 1, \dots, N$, $j = i + 1, \dots, N$. Claramente, esse procedimento é suficiente para garantir que $P(\alpha)$ dada por (2) é uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros satisfazendo o Lema 1. Esta idéia, primeiramente explorada em [13], introduz algum conservadorismo pois, embora a existência de $P_i = P_i' > 0$ tal que $T_{H_i} < 0$ seja uma condição necessária para a estabilidade de \mathcal{A} (os vértices devem ser estáveis), $T_{H_{ij}}$ não necessariamente precisa ser definido negativo para garantir que a soma total é definida negativa.

Observe que (3) representa uma função polinomial homogênea com coeficientes matriciais de grau dois nos parâmetros α . Usando o lado esquerdo da condição (b) do Lema 1, polinômios de graus maiores podem ser obtidos, fornecendo para um $d \in \mathbb{Z}_+$ genérico

$$\Gamma_d(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(d+2)} T_\ell \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N};$$

$$T_\ell = \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 2) T_{H_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 1, 1) T_{H_{ij}} \right)$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d + 2) \quad (4)$$

que é um polinômio homogêneo de grau $d + 2$. Na seqüência, o resultado principal deste trabalho é apresentado.

Teorema 3 *Uma matriz de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros $P(\alpha)$ dada por (2) garante a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas P_i , $i = 1, \dots, N$ e um d suficientemente grande tais*

que, para $\ell = 1, \dots, J(d+2)$, as seguintes LMIs são satisfeitas

$$T_\ell = \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 2)T_{H_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 1, 1)T_{H_{ij}} < 0$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d+2) \quad (5)$$

Prova: Suficiência. É imediato mostrar que, se existirem matrizes simétricas definidas positivas P_i , $i = 1, \dots, N$ e um $d \in \mathbb{Z}_+$ tais que (5) é satisfeita para $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ então, a partir da equação (4), pode-se concluir que as condições do Lema 1 são verificadas.

Necessidade: Definindo

$$L \triangleq \max_{\ell=1, \dots, J(2)} \lambda_{\max}(-T_\ell); \quad \kappa \triangleq \min_{\alpha \in \Delta_N} \lambda_{\min}(-\Gamma(\alpha))$$

é claro que para qualquer vetor w tal que $w'w = 1$ tem-se que

$$L \geq \max_{\ell=1, \dots, J(2)} w'(-T_\ell)w; \quad \min_{\alpha \in \Delta_N} w'(-\Gamma(\alpha))w \geq \kappa$$

Escolhendo $d \in \mathbb{Z}_+$ tal que $d \geq U/L - 2$, o Teorema 2 garante que todos os coeficientes $w'(-T_\ell)w$, $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ do polinômio $w'(-\Gamma_d(\alpha))w$ são positivos. Como a escolha de w é arbitrária, conclui-se que todas as LMIs T_ℓ , $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ são definidas negativas. ■

A principal idéia do Teorema 3 é simplesmente explorar a positividade de $\alpha \in \Delta_N$, impondo que cada termo de (5) seja definido negativo para garantir que $\Gamma_d(\alpha) < 0$. À medida que d cresce, um número maior de LMIs que são cada vez menos conservadoras precisa ser verificado. Uma solução factível $P_i = P'_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ para qualquer d fixo é suficiente para assegurar que $\Gamma_d(\alpha) < 0$ e também é factível para valores maiores do que d . Note que o número de variáveis escalares é dado por $N(n+1)n/2$ (número de elementos das matrizes simétricas P_i , $i = 1, \dots, N$) e não depende de d . Sempre que existir uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros dada por (2) tal que $\Gamma(\alpha) < 0$, o procedimento de relaxação converge para a necessidade à medida que d aumenta. O resultado pode ser visto como uma generalização do Teorema de Pólya para o caso de funções polinomiais com coeficientes matriciais. A cômputo de um limitante exato para d , entretanto, não pode ser obtido a partir do Teorema 2, pois os coeficientes do polinômio original (considerando-se $d = 0$) são expressões matriciais a serem determinadas, impossibilitando o cálculo de L e κ .

Vale a pena mencionar que o caso $d = 0$ fornece uma condição suficiente que é equivalente às condições apresentadas em [13]. Note também que, como discutido em [1], uma caracterização completa da estabilidade Hurwitz de um politopo \mathcal{A} pode necessitar, no caso geral, funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros.

5 Estudo de caso: $N = 2$

Considere que as condições do Teorema 3 são aplicadas ao politopo \mathcal{A} com $N = 2$ vértices. Neste caso,

$$T_{H_1} = A'_1 P_1 + P_1 A_1; \quad T_{H_2} = A'_2 P_2 + P_2 A_2$$

$$T_{H_{12}} = A'_1 P_2 + P_2 A_1 + A'_2 P_1 + P_1 A_2$$

Então, para $d = 0$, o número de LMIs é $J(2) = 3$, $\mathcal{K}(2) = \{02, 11, 20\}$ e as LMIs são

$$T_{H_1} < 0; \quad T_{H_2} < 0 \quad (6)$$

que são condições necessárias e

$$T_{H_{12}} < 0 \quad (7)$$

Para $d = 1$, o número de LMIs é $J(3) = 4$, $\mathcal{K}(3) = \{03, 12, 21, 30\}$ e as LMIs são (6) e

$$T_{H_1} + T_{H_{12}} < 0; \quad T_{H_2} + T_{H_{12}} < 0 \quad (8)$$

Note que uma solução factível para (6)-(7) também é factível para (6)-(8), mas o contrário não é verdade, pois a condição (7) é mais restritiva do que (8). Para $d = 2$, o número de LMIs é $J(4) = 5$, $\mathcal{K}(4) = \{04, 13, 22, 31, 40\}$ e as LMIs são (6) e

$$2T_{H_1} + T_{H_{12}} < 0; \quad T_{H_1} + T_{H_2} + 2T_{H_{12}};$$

$$2T_{H_2} + T_{H_{12}} < 0$$

e assim por diante. É importante enfatizar que a existência de $P_1 = P'_1 > 0$ e $P_2 = P'_2 > 0$ satisfazendo as LMIs (6) é uma condição necessária para a estabilidade e que as novas LMIs são obtidas como combinações lineares de T_{H_1} , T_{H_2} e $T_{H_{12}}$. Isto também é verdade para valores maiores de N , i.e. a existência de $P_i = P'_i > 0$ tal que $T_{H_i} < 0$, $i = 1, \dots, N$ é uma condição necessária para a estabilidade Hurwitz de \mathcal{A} (estabilidade dos vértices) e as novas LMIs são escritas como combinações lineares de T_{H_i} e $T_{H_{ij}}$. À medida que d aumenta, as novas LMIs tornam-se mais fáceis de serem satisfeitas e, se uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros que garante a estabilidade Hurwitz existe, a necessidade é alcançada assintoticamente.

6 Exemplos Numéricos

Para ilustrar como o processo de relaxação evolui à medida que d aumenta, dois exemplos são considerados. O primeiro trata da estabilidade Hurwitz de um politopo de matrizes de ordem $n = 3$ com $N = 2$ vértices descritos por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1938 & 0.3961 & -0.7104 \\ 0.0374 & 0.0988 & -0.9082 \\ 0.4803 & -0.2257 & -0.4496 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.6343 & 0.1343 & -0.9079 \\ -0.7179 & -0.6443 & -0.2978 \\ 0.3733 & -0.4191 & 0.3495 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

Usando o procedimento de relaxação do Teorema 3, a função de Lyapunov dependente de parâmetros $v(x) = x'(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)x$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, com vértices

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6211.6256 & -4246.4071 & 797.1301 \\ -4246.4071 & 4617.7169 & -2728.6439 \\ 797.1301 & -2728.6439 & 5404.0494 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 7210.8648 & -2695.7239 & 5518.3903 \\ -2695.7239 & 2515.4775 & -3599.9506 \\ 5518.3903 & -3599.9506 & 10281.6470 \end{bmatrix};$$

foi obtida para $d = 6$. A Tabela 1 mostra o λ_{max} de T_ℓ dado por (5), $\ell = 1, \dots, J(d+2)$. Note que os valores nos vértices, dados respectivamente pelo maior autovalor de $A'_1 P_1 + P_1 A_1$ e $A'_2 P_2 + P_2 A_2$, são mantidos enquanto os outros evoluem até todos os termos tornarem-se negativos. Veja também a Figura 1 na qual o maior valor de cada linha da Tabela 1 foi plotado em função de d , ilustrando como todos os coeficientes matriciais tornam-se definidos negativos.

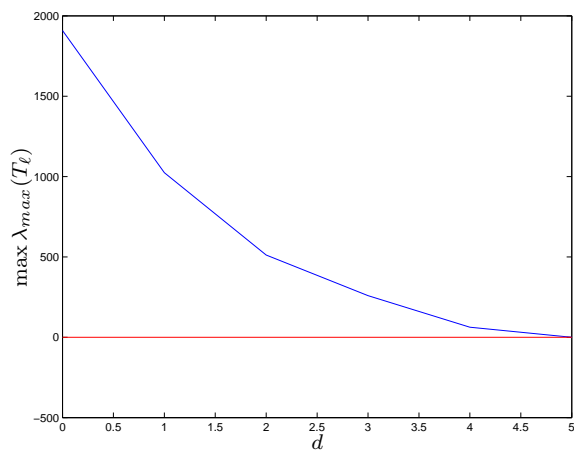


Figura 1: Máximo de λ_{max} de T_ℓ dado por (5) em função de $d = 0, \dots, 6$ para a análise de estabilidade do politopo descrito pelos vértices (9)-(10).

Como segundo exemplo considere um politopo de $N = 3$ vértices descritos por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0996 & 0.9846 & -0.4496 \\ -0.9045 & -0.0387 & 0.9657 \\ 0.6933 & -0.7612 & -0.4179 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.4061 & 0.9017 & -0.3194 \\ -0.3740 & -0.1498 & 0.5358 \\ -0.4592 & -0.5424 & -0.3608 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.6327 & -0.3142 & 0.8716 \\ 0.6263 & -0.6932 & 0.9598 \\ -0.0090 & -0.9367 & 0.3422 \end{bmatrix}; \quad (13)$$

Todos os coeficientes matriciais tornam-se definidos negativos para $d = 4$, fornecendo a função de Lyapunov dependente de parâmetros

$$v(x) = x'(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)x; \quad \alpha \in \Delta_N$$

descrita pelos vértices

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2125 & -0.0922 & -0.1425 \\ -0.0922 & 0.2555 & -0.0179 \\ -0.1425 & -0.0179 & 0.2127 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.3590 & 0.0932 & 0.0335 \\ 0.0932 & 0.6263 & 0.0476 \\ 0.0335 & 0.0476 & 0.5642 \end{bmatrix};$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.2062 & 0.0694 & -0.0249 \\ 0.0694 & 0.5477 & -0.2869 \\ -0.0249 & -0.2869 & 0.8296 \end{bmatrix}$$

A Figura 2 mostra o máximo de λ_{max} de T_ℓ dado por (5), $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ em função de $d = 0, \dots, 4$. Note que, sempre que uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros existe, a convergência é garantida pelo Teorema 2. Infelizmente, nada pode ser dito sobre a evolução do máximo de λ_{max} de T_ℓ , dado por (5), $\ell = 1, \dots, J(d+2)$. (Não existe garantia de um decréscimo monotônico).

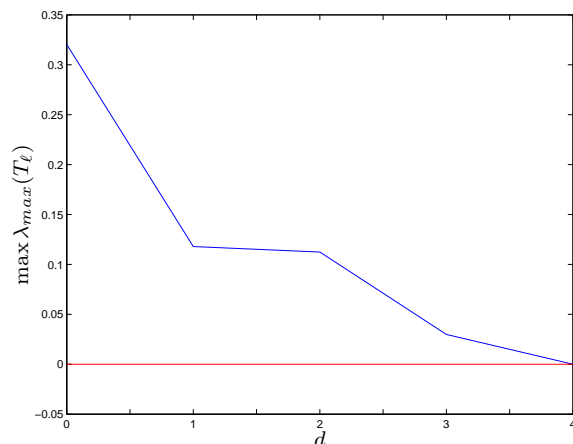


Figura 2: Máximo de λ_{max} of T_ℓ , dado por (5), $\ell = 1, \dots, J(d+2)$, como função de $d = 0, \dots, 4$ para a análise de estabilidade do politopo descrito pelos vértices (11)-(13).

7 Conclusão

Um procedimento de relaxação foi proposto para construir uma seqüência de condições LMI garantindo a existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros para a estabilidade Hurwitz de um politopo de matrizes. A medida que o número de LMIs aumenta, as condições suficientes tornam-se também necessárias para a existência de tal função. Os resultados podem ser facilmente estendidos para tratar o caso Schur e outros problemas na área de controle baseados na existência de funções de Lyapunov que dependem linearmente dos parâmetros.

Tabela 1: Evolução de λ_{max} de T_ℓ dado por (5), $\ell = 1, \dots, J(d+2)$, para $d = 0, \dots, 6$ na análise de estabilidade do politopo descrito pelos vértices (9)-(10).

d	$\lambda_{max}(T_\ell)$									
0	-0.024	3.175	0.718	-0.006						
1	-0.024	1.464	0.605	0.378	-0.006					
2	-0.024	-0.195	1.519	0.191	0.164	-0.006				
3	-0.024	-1.737	1.250	0.643	0.222	0.020	-0.006			
4	-0.024	-3.008	-0.491	1.252	0.111	0.228	-0.083	-0.006		
5	-0.024	-3.814	-3.692	0.479	0.277	-0.066	0.144	-0.161	-0.006	
6	-0.024	-4.219	-8.241	-3.281	-0.242	-0.910	-0.114	-0.029	-0.223	-0.006

Referências

- [1] P. A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):165–169, March 2004.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [3] E. de Klerk and D. V. Pasechnik. Approximation of the stability number of a graph via copositive programming. *SIAM Journal on Optimization*, 12(4):875–892, 2002.
- [4] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3):27–38, June 1999.
- [5] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 644–649, Las Vegas, December 2002.
- [6] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [7] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edition, 1952.
- [9] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):500–504, March 2003.
- [10] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [11] V. Powers and B. Reznick. A new bound for Pólya's Theorem with applications to polynomials positive on polyhedra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164:221–229, 2001.
- [12] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.
- [13] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [14] C. W. Scherer. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. Unpublished manuscript.
- [15] C. W. Scherer. Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4652–4657, Maui, HI, USA, December 2003.
- [16] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999. URL: <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>.

XXVIII - CNMAC

Congresso Nacional de Matemática Aplicada de Computacional

12 a 15 de setembro de 2005
Centro de Convenções do Campus
SENAC - São Paulo



Avaliação da Sessão Técnica 2ª Fase

Título:

1. O trabalho está tecnicamente correto? sim não
2. O trabalho cita adequadamente outros trabalhos relacionados? sim não
3. O artigo está de acordo com o modelo sugerido? sim não
4. A contribuição do trabalho está clara? sim não
5. A contribuição é significativa? sim não
6. A organização e a distribuição do artigo está adequada? sim não
7. A linguagem está adequada (português ou inglês)? sim não
8. Recomendações para o(s) autor(es)

9. Por favor, verifique se está tudo correto, pois esta avaliação será enviada para o autor, no prazo de 48h.