

Grafos com exatamente t tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais

Rommel Melgaço Barbosa, Melissa Isernhagen

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás
Caixa Postal, 131
74001-970, Goiânia, GO
E-mail: rommel@inf.ufg.br

Dizemos que um grafo G pertence a classe $M(t)$, se G tiver exatamente t diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais de vértices. O grafo G pertence a classe $I(t)$ se G tiver exatamente t diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais com tamanhos $r, r+1, \dots, r+(t-1)$, para algum inteiro r . A cintura de um grafo é definida como o tamanho de seu menor ciclo. A cintura de um grafo sem ciclos é definida como sendo infinita. Caro [3] provou que o reconhecimento de grafos em $M(t)$ é um problema Co-NP-completo. Em [2] são apresentados algumas propriedades de grafos em $M(t)$ e $I(t)$ para algumas classes de grafos e em [1] são caracterizados os grafos com cintura maior ou igual a 8 em $M(2)$. Apresentamos aqui algumas propriedades para grafos em $M(t)$ e também uma caracterização de grafos com cintura > 7 em $I(2)$.

O artigo [2] apresenta, mais precisamente, condições suficientes para que um grafo pertença a $M(2)$, condições suficientes para que um grafo pertença a $I(2)$ e, além disso, apresenta um teorema (Teorema 1), provando que um grafo livre de $K_{1,3}$ em $M(t)/I(t)$ deve ser bem-coberto, isto é todos seus conjuntos maximais de vértices tem a mesma cardinalidade.

Teorema 1 [Barbosa e Hartnell] Se G é livre de $K_{1,3}$ e $G \in M(t)/I(t)$, então G é bem-coberto.

Uma clique em um grafo G é um subgrafo completo maximal de G . Um vértice v de um grafo é dito ser simplicial se o grafo gerado por $N[v]$ for uma clique. Uma clique de um grafo G tendo pelo menos um vértice simplicial é denominado um simplex do grafo. Um grafo G é um grafo simplicial se todo vértice de G for simplicial or for adjacente a um vértice simplicial. Um grafo é cordal se todo

ciclo de comprimento maior ou igual a 4 tiver uma corda.

O Teorema 2, enunciado a seguir, é muito importante, pois apresenta uma caracterização completa dos grafos simpliciais em $M(2)$. Neste teorema é apresentada uma condição necessária e suficiente para que um grafo simplicial pertença a $M(2)$.

Teorema 2 [Barbosa e Hartnell] Um grafo simplicial G pertence a $M(2)$ se e somente se os vértices de G podem ser particionados em conjuntos não-vazios A e Q tal que os vértices em A pertençam a exatamente um simplex e aqueles em Q a exatamente $k > 1$ simplexes onde os vértices de Q formam uma clique.

O Teorema 3, último teorema a ser apresentado em [2], contempla a classe dos grafos cordais. Ele contém uma condição suficiente para que um grafo em tal classe pertença a $I(2)$.

Teorema 3 [Barbosa e Hartnell] Seja G um grafo conexo cordal. Se g pertence a exatamente um simplex, $\forall g \in V(G) / Q$, tal que Q é uma clique na qual todo vértice de Q não pertence a nenhum simplex, então $G \in I(2)$.

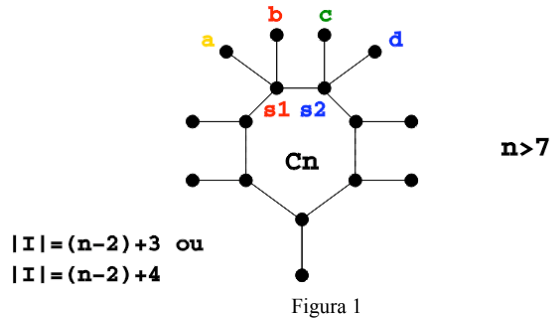
Uma folha é um vértice de grau 1 em um grafo. Um talo é um vértice adjacente a uma folha.

Como foi dito anteriormente, o artigo [1] contém uma caracterização dos grafos com cintura > 7 com exatamente dois tamanhos de conjuntos independentes maximais. Apresentamos a seguir uma caracterização dos grafos com cintura maior ou igual a 8 pertencentes a $I(2)$.

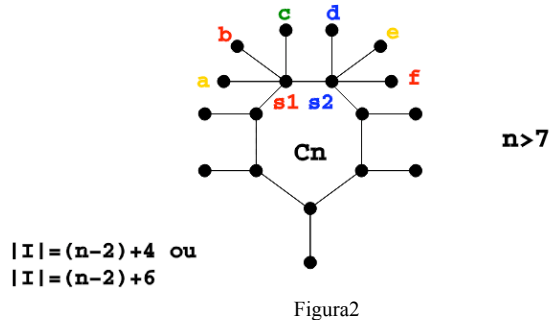
TEOREMA Seja G um grafo conexo de cintura > 7 . G pertence a $I(2)$ se e somente se obedece a um dos seguintes itens:

1. G não tem folhas. Então G é C_8, C_9, C_{10}, C_{11} ou C_{13} .

2. G tem exatamente dois talos, digamos s_1 e s_2 , com mais de uma folha anexada, digamos L_1 e L_2 , respectivamente. Então $|L_1| = |L_2| = 2$, s_1 e s_2 são adjacentes e todos os outros vértices são uma folha ou um talo com apenas uma folha anexada.



Na Figura 1, temos $L_1 = \{a, b\}$ e $L_2 = \{c, d\}$. Como $|L_1| = |L_2| = 2$, obtemos conjuntos independentes maximais com tamanhos consecutivos. Note que todos os vértices do grafo, exceto s_1, s_2, L_1 e L_2 , são ou uma folha ou um talo com uma folha anexada. Sendo assim, ao formar um conjunto independente maximal qualquer, sempre teremos que inserir ou o talo ou a folha que está anexada a ele ao conjunto. Teremos, portanto, $n-2$ elementos.



Como na Figura 2 os tamanhos de L_1 e L_2 são maiores do que 2, não obtemos conjuntos independentes maximais com tamanhos consecutivos.

3. G tem exatamente um talo, digamos s_1 , com mais de uma folha, digamos L_1 , anexada. Um dos três subcasos deve ocorrer.
- i. $G - N[SL]$ é apenas um componente, isto é, s_1 e suas

folhas, L_1 , tal que $|L_1| = 2$.

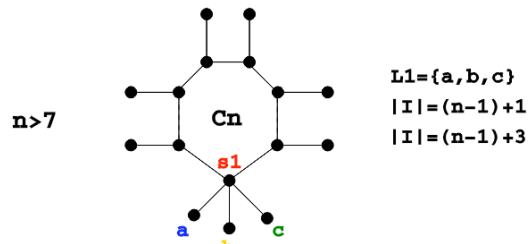


Figura 3

Na Figura 3 é mostrado um exemplo no qual não é possível obter tamanhos de conjuntos independentes maximais consecutivos, pois o tamanho de L_1 não é 2. Já na Figura 4, onde esta condição é obedecida, temos conjuntos independentes maximais com tamanhos sucessivos.

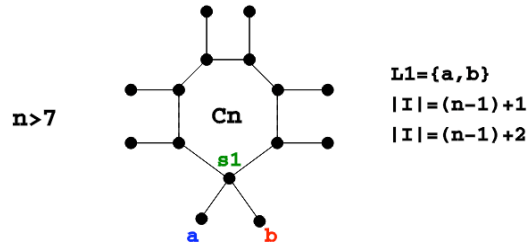


Figura 4

A Figura 5 é um exemplo de grafo que também obedece todas as condições do item 3(i) do Teorema.

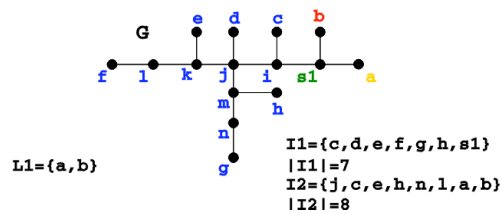


Figura 5

- ii. $G - N[SL]$ consiste em dois componentes, digamos H_1 e H_2 . H_2 é s_1 e suas folhas L_1 , onde $|L_1| = 2$ e $H_1 \cong K_2 \cong [ab]$, onde ou a ou b é de grau 2 e é adjacente a um talo adjacente a s_1 .

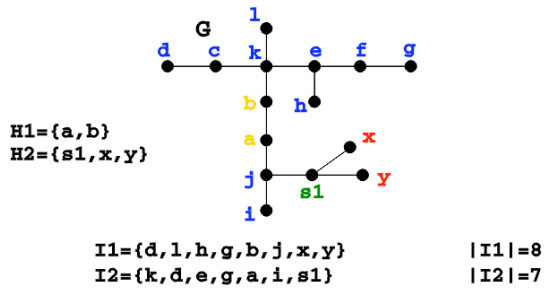


Figura 6: Exemplo para o item 3(ii)

- iii. $G - N[SL]$ consiste em três componentes, digamos H_1 , H_1' e H_2 . H_2 como em (ii) e $H_1 = [a_1 b_1]$ e $H_1' = [a_1' b_1']$. Similar a (ii), a_1 e a_1' são cada um de grau 2 e adjacente a um talo distinto, que é adjacente a s_1 . Além disso, b_1 e b_1' são cada um de grau 2 e adjacentes a um talo, digamos s_3 e s_4 , respectivamente, onde s_3 e s_4 são adjacentes.

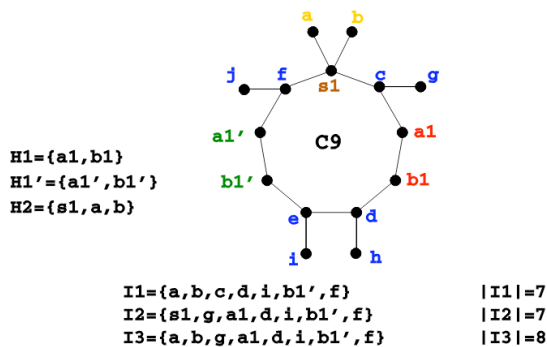
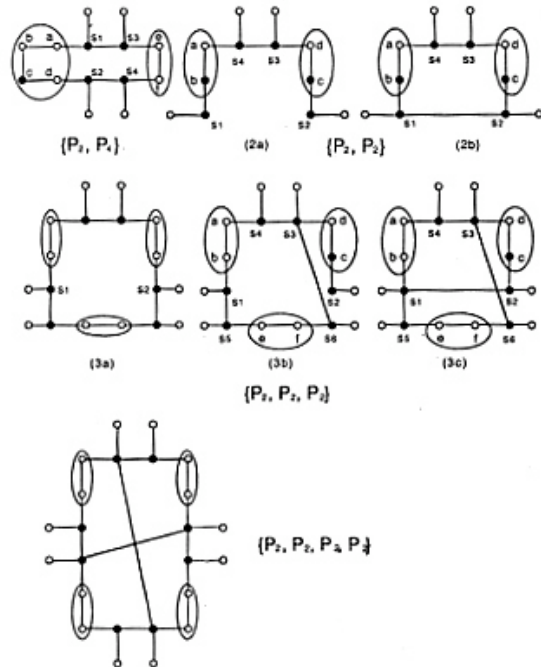


Figura 7: Exemplo para o item 3(iii)

4. Não há talos com mais de uma folha anexada e $G - N[SL]$ tem exatamente um componente. Então, este componente é $K_1, P_2, P_3, P_4, P_6, P_8, C_8, C_9$ ou C_{11} .
5. Não há talos com mais de uma folha anexada e $G - N[SL]$ tem vários componentes. Se quaisquer dois destes componentes são chamados H_1 e H_2 , então ou $\{H_1, H_2\} \cong \{P_2, P_4\}$ ou $\{H_1, H_2\} \cong \{P_2, P_2\}$. Além disso, se $P_4 = [abcd]$ e $P_2 = [ef]$, então, em G , a, b, c, d, e e f são todos de grau 2 e fazem parte do 10-ciclo $(s_1 a b c d s_2 s_4 e f s_3)$, onde s_1, s_2, s_3 e s_4 são talos em G . Se $H_1 \cong P_2 \cong [ab]$ e H_2

$\cong P_2 \cong [cd]$, então, por alguma escolha de $x \in \{a, b\}$ e $y \in \{c, d\}$, x e y são ambos de grau 2 e tem, cada um, exatamente um talo como vizinho e estes talos são adjacentes. G ou é um dos grafos indicados na figura abaixo ou pode ser derivado de um deles segundo a seguinte operação (repetida tão freqüentemente quanto necessário). Adicione um novo talo que tem uma única folha a qualquer subconjunto dos vértices pretos desde que a restrição de cintura seja mantida. Este novo talo é preto no grafo resultante.



Referências

- [1] A. Finbow, B. Hartnell and C. Whitehead, A characterization of graphs of girth eight or more with exactly two sizes of maximal independent sets, *Discret Mathematics*. 125:153-167, 1995.
- [2] R. Barbosa and B. Hartnell. Some problems based on the relative sizes of the maximal independent sets in a graph. *Congressus Numerantium* 131 (1998), p.115 – 121.
- [3] Y. Caro. Subdivisions, parity and well-covered graphs, *J. Graph Theory* 25 (1997), 85-94.