

# O kernel de Cercignani-Lampis na modelagem de fenômenos de superfície em problemas da dinâmica de gases rarefeitos

**Rosenei F. Knackfuss**

Departamento de Matemática - CCNE - UFSM

Av. Roraima, s/n, prédio 13

97105-900, Santa Maria, RS, Brasil

E-mail: knackfuss@smail.ufsm.br,

**Liliane B. Barichello\***

Instituto de Matemática - UFRGS

Av. Bento Gonçalves, 9500

91509-900, Porto Alegre, RS, Brasil

E-mail: lbaric@mat.ufrgs.br.

## Introdução

O interesse por pesquisas em fenômenos que envolvem a dinâmica de gases rarefeitos tem aumentado nos últimos anos em função das várias aplicações nesta área, principalmente, no fluxo de gases em microcanais. Muitos trabalhos podem ser citados neste contexto [1, 2, 8, 13].

Para um gás em regime de transição usa-se a equação de Boltzmann [16], que devido à dificuldade de tratamento, principalmente no termo integral de colisão, é usualmente aproximada pelas equações modelo ou equações cinéticas [4]. Assim, diferentes problemas são formulados por diversas equações modelo, destacando-se: o modelo BGK [5], o modelo S [12], o modelo CLF [7, 11] e o modelo CES [4].

No sentido dos métodos determinísticos, destaca-se uma versão analítica [3] do método de ordenadas discretas [9] que, em geral, determina soluções precisas para alguns problemas clássicos na dinâmica de gases rarefeitos.

Devido à eficiente aplicabilidade do método de ordenadas discretas analítico, decidiu-se investigar questões relacionadas a diferentes modelos em relação a interação gás-superfície, mais especificamente, o modelo de Cercignani-Lampis [8, 10, 14, 15], por, segundo a literatura [14], ser mais apropriado em estudos básicos da dinâmica de gases rarefeitos do que o usual modelo de Maxwell.

Neste trabalho, a teoria cinética para o fluxo do gás rarefeito, em particular, para o problema clássico de Poiseuille que consiste no movimento de um gás rarefeito, devido a um gradiente de pressão, em um canal plano definido por duas placas paralelas, é descrita por um modelo linearizado, modelo S, da equação de Boltzmann

[13]. Diferentemente de como apresentado na Ref. [15], aqui, define-se uma formulação genérica, em relação ao parâmetro de adimensionalização que pode ser definido em termos da viscosidade ou da condutividade térmica. Para melhor descrever o processo de interação entre o gás e a parede utiliza-se, aqui, o modelo de Cercignani-Lampis [14, 15].

## Formulação

Considera-se a equação cinética escrita em termos da perturbação  $h(y, \mathbf{c})$  para a função distribuição, de uma Maxwelliana local, como

$$c_y \frac{\partial}{\partial y} h(y, \mathbf{c}) + \varepsilon h(y, \mathbf{c}) = \varepsilon \pi^{-3/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} \mathbf{F}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(y, \mathbf{c}') dc'_x dc'_y dc'_z + S(\mathbf{c}), \quad (1)$$

onde o núcleo de espalhamento é dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = 1 + 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) + (2/3)(c'^2 - 3/2)(c^2 - 3/2) + \beta \mathbf{M}(\mathbf{c}', \mathbf{c}), \quad (2)$$

com

$$\mathbf{M}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = (4/15)(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})(c'^2 - 5/2)(c^2 - 5/2). \quad (3)$$

Para os modelos BGK e S tem-se, respectivamente,  $\beta = 0$  e  $\beta = 1$ . Ainda, o termo de fonte em unidades adimensionais é dado por

$$S(\mathbf{c}) = K_1 c_x \quad (4)$$

e

$$\varepsilon = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l, \quad (5)$$

onde  $K_1$  representa o gradiente constante de densidade,  $\sigma_0$  é o diâmetro de colisão das partículas de

\*Este trabalho é parcialmente financiado pelo CNPq

gás,  $n_0$  é a densidade de equilíbrio das partículas de gás e  $l$  é o livre caminho médio.

Para o modelo S, se o livre caminho médio é em termos da viscosidade tem-se  $\varepsilon = \varepsilon_p = 1$  e em termos da condutividade térmica resulta  $\varepsilon = \varepsilon_t = 3/2$ .

Para melhor descrever o processo de interação entre o gás e a parede utiliza-se o modelo de Cercignani-Lampis [14, 15], que é definido em termos dos coeficientes de acomodação normal ( $\alpha_n$ ) e tangencial ( $\alpha_t$ ) dado por

$$h(-a, c_x, c_y, c_z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty h(-a, c'_x, -c'_y, c'_z) \times \mathbf{R}_{CL}(c'_x, -c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_z dc'_y \quad (6)$$

e

$$h(a, c_x, -c_y, c_z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty h(a, c'_x, c'_y, c'_z) \times \mathbf{R}_{CL}(c'_x, c'_y, c'_z : c_x, -c_y, c_z) dc'_x dc'_z dc'_y. \quad (7)$$

Aqui,

$$\mathbf{R}_{CL}(c'_x, c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) = \frac{2c'_y}{\pi\alpha_n\alpha_t(2-\alpha_t)} \times T(c'_x : c_x) S(c'_y : c_y) T(c'_z : c_z), \quad (8)$$

onde

$$T(x : z) = \exp\left[-\frac{[(1-\alpha_t)z-x]^2}{\alpha_t(2-\alpha_t)}\right], \quad (9)$$

$$S(x : z) = \exp\left[-\frac{[(1-\alpha_n)^{1/2}z-x]^2}{\alpha_n}\right] \times \widehat{I}_0\left[\frac{2(1-\alpha_n)^{1/2}|xz|}{\alpha_n}\right] \quad (10)$$

e

$$\widehat{I}_0(w) = I_0(w)e^{-w}. \quad (11)$$

Aqui,  $I_0(w)$  é a função de Bessel modificada, definida como

$$I_0(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w \cos \phi} d\phi. \quad (12)$$

Para avaliar as grandezas físicas de interesse, segue-se [15] e obtém-se, para o perfil de velocidade

$$u(y) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-c'^2} h(y, c_x, c_y, c_z) c_x dc_x dc_y dc_z \quad (13)$$

e para o perfil de fluxo de calor

$$q(y) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-c'^2} h(y, c_x, c_y, c_z) \times (c^2 - 5/2) c_x dc_x dc_y dc_z. \quad (14)$$

Uma vez que, verdadeiramente, não calcula-se a função distribuição completa  $h(y, c_x, c_y, c_z)$  para encontrar as grandezas físicas de interesse, pode-se obter os resultados desejados a partir de vários momentos da função distribuição. Desta forma, multiplicam-se as Eqs. (1), (6) e (7) por

$$\phi_1(c_x, c_z) = \frac{1}{\pi} c_x e^{-(c_x^2 + c_z^2)} \quad (15)$$

e

$$\phi_2(c_x, c_z) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} c_x (c_x^2 + c_z^2 - 2) e^{-(c_x^2 + c_z^2)}, \quad (16)$$

integra-se sobre todo  $c_x$  e  $c_z$ , introduz-se a nova notação  $\xi = c_y$  e faz-se uma reformulação nas equações encontrando-se o chamado problema  $\mathbf{G}$  definido como

$$\xi \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(y, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}(y, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi') \mathbf{G}(y, \xi') d\xi' + \mathbf{\Gamma}(\xi), \quad (17)$$

onde

$$\mathbf{H}(y, \xi) = \mathbf{Q}(\xi) \mathbf{G}(y, \xi), \quad (18)$$

$$\Psi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2} \mathbf{Q}^T(\xi) \mathbf{Q}(\xi) \quad (19)$$

e

$$\mathbf{G}(y, \xi) = \begin{bmatrix} g_1(y, \xi) \\ g_2(y, \xi) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Ainda,  $\mathbf{\Gamma}(\xi)$  é definido como

$$\mathbf{S}(\xi) = \mathbf{Q}(\xi) \mathbf{\Gamma}(\xi), \quad (21)$$

onde

$$\mathbf{S}(\xi) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

e

$$\mathbf{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} (2/15)^{1/2}(\xi^2 - 1/2) & 1 \\ 2(15^{-1/2}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Reescrevendo-se as condições de contorno, na forma do chamado problema  $\mathbf{G}$ , obtém-se

$$\mathbf{G}(-a, \xi) = \int_0^\infty \mathbf{T}(\xi', \xi) \mathbf{G}(-a, -\xi') d\xi' \quad (24)$$

e

$$\mathbf{G}(a, -\xi) = \int_0^\infty \mathbf{T}(\xi', \xi) \mathbf{G}(a, \xi') d\xi'. \quad (25)$$

Aqui,

$$\mathbf{T}(\xi', \xi) = \mathbf{Q}(\xi)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}(\xi') k(\xi', \xi), \quad (26)$$

$$k(\xi', \xi) = (2\xi'/\alpha_n) e^{-(1/\alpha_n)[(1-\alpha_n)^{1/2}\xi - \xi']^2} \times \widehat{I}_0[2(1-\alpha_n)^{1/2}\xi'\xi/\alpha_n]. \quad (27)$$

Baseado na notação vetorial, pode-se expressar as grandezas físicas, em termos de  $\mathbf{G}$ , como

$$u(y) = [0 \quad 1] \int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi) \mathbf{G}(y, \xi) d\xi \quad (28)$$

para o perfil de velocidade e

$$q(y) = (15/2)^{1/2} [1 \quad 0] \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \mathbf{G}(y, \xi) d\xi \quad (29)$$

para perfil de fluxo de calor.

## Solução Particular e Método de Ordenadas Discretas

Para determinar-se uma solução particular para o problema dado, propõe-se a solução na forma

$$\mathbf{G}^p(y, \xi) = \mathbf{B}y^2 + \mathbf{C}y\xi + \mathbf{D}\xi^2 + \mathbf{E}\xi + \mathbf{F}, \quad (30)$$

onde  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  são vetores com componentes constantes.

Substituindo-se a Eq. (30) na Eq. (17), encontra-se

$$\mathbf{G}^p(y, \xi) = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{bmatrix} (1/10)\sqrt{30} \\ y^2 - 2y\xi + 2\xi^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

que é a solução particular da Eq. (17). Assim, como a solução geral da Eq. (17) é da forma

$$\mathbf{G}(y, \xi) = \mathbf{G}^h(y, \xi) + \mathbf{H}^p(y, \xi), \quad (32)$$

para completar a solução deve-se encontrar a solução da equação homogênea

$$\xi \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}^h(y, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}^h(y, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{G}^h(y, \xi') d\xi', \quad (33)$$

com as condições de Cercignani-Lampis

$$\mathbf{G}^h(a, -\xi) - \int_0^{\infty} \mathbf{T}(\xi', \xi) \mathbf{G}^h(a, \xi') d\xi' = \mathbf{R}(\xi), \quad (34)$$

onde o termo conhecido  $\mathbf{R}(\xi)$  fica definido por

$$\mathbf{R}(\xi) = \int_0^{\infty} \mathbf{T}(\xi', \xi) \mathbf{G}^p(a, -\xi') d\xi' - \mathbf{G}^p(a, -\xi). \quad (35)$$

Tem-se, também, que considerar a condição de simetria

$$\mathbf{G}^h(y, -\xi) = \mathbf{G}^h(-y, \xi) \quad (36)$$

para todo  $y$  e  $\xi$ .

Resolve-se o problema homogêneo através do método de ordenadas discretas analítico. Para isto, define-se um esquema de quadratura e reescreve-se a Eq. (33) na versão de ordenadas discretas como

$$\begin{aligned} \pm \xi_i \frac{d}{dy} \mathbf{G}^h(y, \pm \xi_i) + \varepsilon \mathbf{G}^h(y, \pm \xi_i) = \\ \varepsilon \sum_{k=1}^N \omega_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{G}^h(y, \xi_k) + \mathbf{G}^h(y, -\xi_k)]. \end{aligned} \quad (37)$$

As Eqs (37) admitem soluções exponenciais da forma

$$\mathbf{G}^h(y, \xi) = \Phi(\nu, \xi) e^{-y\varepsilon/\nu}. \quad (38)$$

Substitui-se a eq. (38) na eq. (37) para encontrar

$$\begin{aligned} (\nu \mp \xi_i) \Phi(\nu, \pm \xi_i) = \\ \nu \sum_{k=1}^N \omega_k \Psi(\xi_k) [\Phi(\nu, \xi_k) + \Phi(\nu, -\xi_k)]. \end{aligned} \quad (39)$$

Tem-se, agora, os vetores  $\Phi_+(\nu)$  e  $\Phi_-(\nu)$  de dimensão  $2N \times 1$ , com  $N$  componentes,  $2 \times 1$ , definidas, respectivamente, por  $\Phi(\nu, \xi_k)$  e  $\Phi(\nu, -\xi_k)$ . Escrevendo-se

$$\mathbf{U} = \Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu) \quad (40)$$

e após algumas manipulações algébricas, encontra-se um problema de autovalores que define os valores de  $\nu$  e a solução para a equação homogênea dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\pm}^h(y) = A_1 \Phi^1 + \sum_{j=2}^{2N} [A_j \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-(a+y)\varepsilon/\nu_j} + \\ \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-(a-y)\varepsilon/\nu_j}] \end{aligned} \quad (41)$$

onde introduz-se a solução exata  $\Phi^1$ , de dimensão  $2N \times 1$ , com componentes definidas por

$$\mathbf{F}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Assim, substituindo-se a Eq. (41) na Eq. (34), obtém-se um sistema linear e encontram-se as constantes arbitrárias  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ .

Finalmente, encontra-se a solução completa

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(y \pm \xi_i) = \mathbf{G}^h(y, \pm \xi_i) + A_1 \Phi^1 + \sum_{j=2}^{2N} [A_j \\ \times \Phi_{\pm}(\nu_j) e^{-(a+y)\varepsilon/\nu_j} + \Phi_{\mp}(\nu_j) e^{-(a-y)\varepsilon/\nu_j}] \end{aligned} \quad (43)$$

e obtém-se, a versão em ordenadas discreta para o perfil de velocidade e fluxo de calor, respectivamente,

$$\begin{aligned} u(y) = (1/2)(y^2 + 1) + A_1 + \sum_{j=2}^{2N} A_j \\ \times [e^{-(a+y)\varepsilon/\nu_j} + e^{-(a-y)\varepsilon/\nu_j}] N_2(\nu_j) \end{aligned} \quad (44)$$

e

$$\begin{aligned} q(y) = (3/4) + (15/2)^{1/2} \sum_{j=2}^{2N} A_j \\ \times [e^{-(a+y)\varepsilon/\nu_j} + e^{-(a-y)\varepsilon/\nu_j}] N_1(\nu_j). \end{aligned} \quad (45)$$

onde  $N_1(\nu_j)$  e  $N_2(\nu_j)$  são as componentes de

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\nu_j) = [\omega_1 \Psi(\xi_1) \quad \omega_2 \Psi(\xi_2) \quad \dots \quad \omega_N \Psi(\xi_N)] \\ \times [\Phi_+(\nu_j) + \Phi_-(\nu_j)]. \end{aligned} \quad (46)$$

Além dessas grandezas de interesse, pode-se avaliar a taxa de fluxo de partículas

$$U = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a u(y) dy \quad (47)$$

e a taxa de fluxo de calor

$$Q = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q(y) dy, \quad (48)$$

que na versão em ordenadas discreta são, respectivamente

$$U = \frac{1}{2a^2} \left[ a \left( \frac{a^2}{3} + 1 \right) + 2aA_1 + 2 \sum_{j=2}^{2N} A_j \frac{\nu_j}{\varepsilon} (1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}) N_2(\nu_j) \right] \quad (49)$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{3a}{2} + 2 \left( \frac{15}{2} \right)^{1/2} \times \sum_{j=2}^{2N} A_j \frac{\nu_j}{\varepsilon} (1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}) N_1(\nu_j) \right]. \quad (50)$$

## Resultados Numéricos e Conclusões

Para implementar as soluções, inicialmente, define-se o esquema de quadratura associado ao método de ordenadas discretas analítico. Objetivando-se calcular integrais no intervalo  $[0, \infty]$ , define-se a transformação não-linear

$$u(\xi) = e^{-\xi} \quad (51)$$

para mapear  $\xi \in [0, \infty)$  sob  $u \in [0, 1]$  e então usa-se o esquema de quadratura de Gauss-Legendre mapeado linearmente no intervalo  $[0, 1]$ . O próximo passo é a determinação dos autovalores (constantes de separação) e os autovetores. Por fim, encontram-se as constantes arbitrárias. Todo o procedimento foi implementado em linguagem Fortran.

O método de ordenadas discretas analítico, mais uma vez, mostrou-se preciso quando usado na equação modelo que representa o problema de Poiseuille com condição de contorno generalizada (Cercignani-Lampis). Este fato é comprovado através de comparações com resultados encontrados na literatura e que são mostrados nas tabelas abaixo. Os resultados baseados no modelo S com condições de contorno de Cercignani-Lampis (S-CL) não mostram grande diferença quando comparados com o modelo BGK com as mesmas condições de contorno (BGK-CL) e com condições de contorno difuso-especular (BGK-DE).

$y/a$	S-CL( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$	BGK-CL[10] $\alpha_n = 0.5$	BGK-DE[6] $\alpha = \alpha_t$
0.0	-1.78245	-1.76674	-1.77883
0.1	-1.77922	-1.76410	-1.77631
0.2	-1.76949	-1.75614	-1.76873
0.3	-1.75310	-1.74272	-1.75506
0.4	-1.72978	-1.72359	-1.73776
0.5	-1.69908	-1.69834	-1.71376
0.6	-1.66028	-1.66633	-1.68335
0.7	-1.61219	-1.62648	-1.64554
0.8	-1.55263	-1.57685	-1.59850
0.9	-1.47666	-1.51314	-1.53812
1.0	-1.35862	-1.41346	-1.44292

Tabela 1: Fluxo de Poiseuille: perfil de velocidade  $u(y)$ ,  $2a = 1$ ,  $\alpha_t = 0.5$ .

$y/a$	S-CL[15] $\alpha_n = 0.5$	S-CL( $\varepsilon = \varepsilon_t$ ) $\alpha_n = 0.5$	BGK-CL[10] $\alpha_n = 0.5$
0.0	2.40629(-1)	2.08790(-1)	1.91854(-1)
0.1	2.39761(-1)	2.08954(-1)	1.91160(-1)
0.2	2.37134(-1)	2.06423(-1)	1.89055(-1)
0.3	2.32674(-1)	2.02118(-1)	1.85470(-1)
0.4	2.26248(-1)	1.95894(-1)	1.80281(-1)
0.5	2.17640(-1)	1.87520(-1)	1.73281(-1)
0.6	2.06511(-1)	1.76624(-1)	1.64148(-1)
0.7	1.92299(-1)	1.62600(-1)	1.52348(-1)
0.8	1.73992(-1)	1.44341(-1)	1.36911(-1)
0.9	1.49341(-1)	1.19367(-1)	1.15681(-1)
1.0	1.06894(-1)	7.47673(-2)	7.77162(-2)

Tabela 2: Fluxo de Poiseuille: perfil de fluxo de calor  $q(y)$ ,  $2a = 1$ ,  $\alpha_t = 0.5$ .

## Referências

- [1] E. B. Arkilic, K. S. Breuer e M. A. Schmidt, Mass flow and tangential momentum accommodation in silicon micromachined channels, *Journal of Fluid Mechanics*, 437 (2001), pp. 29-43.
- [2] L. B. Barichello, M. Camargo, P. Rodrigues e C. E. Siewert, Unified Solutions to classical flow problems based on the BGK model, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 52 (2001), pp. 517-534.
- [3] L. B. Barichello e C. E. Siewert, A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62 (1999), pp. 665-675.
- [4] L. B. Barichello e C. E. Siewert, Some Comments on Modeling the Linearized Boltzmann Equation, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 77 (2003) 43-59.
- [5] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross e M. Krook, 1954, A model for collision processes in gases. I.

- Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, *Physics Review*, 94 (1954), pp. 511-525.
- [6] M. Camargo e L. B. Barichello, Unified approach for variable collision frequency models in rarefied gas dynamics, *TTSP*, 33 (2004), pp. 227.
- [7] C. Cercignani, The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency, *Annals of Physics*, 40 (1966), pp. 469-481.
- [8] C. Cercignani, The Boltzmann equation and its applications, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [9] S. Chandrasekhar, Radiative transfer, Oxford University Press, London, 1950.
- [10] R. F. Knackfuss e L. B. Barichello, Surface effects in rarefied gas dynamics: an analysis based on the Cercignani-Lampis boundary condition, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, em impressão.
- [11] S. K. Loyalka e J. H. Ferziger, Model dependence of Slip Coefficient, *Physics of Fluids*, 11 (1967), pp. 1833-1839.
- [12] E. M. Shakhov, Method of investigation of rarefied gas dynamics (in Russian), Nauka, Moscow, 1974.
- [13] F. Sharipov e V. Seleznev, Data on internal rarefied gas flows, *Journal of Physical Chemical Reference Data*, 27 (1998), pp. 657-706.
- [14] F. Sharipov, Application of the Cercignani scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. III. Poiseuille flow and thermal creep through a long tube, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 22 (2003), pp. 145-154.
- [15] C. E. Siewert, Generalized boundary conditions for S-model Kinetic equations basic to flow in a plane channel, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 72 (2002) 75-88.
- [16] M. M. R. Williams, Mathematical methods in particle transport theory, Butterworth, London, (1971).