

# Solução de equações diferenciais parciais elípticas por técnicas multinível-multigrid em malhas tridimensionais bloco-estruturadas com refinamento localizado

**Hector D. Ceniceros**

Department of Mathematics - University of California

E-mail: hdc@math.ucsb.edu

**Rudimar Luiz Nos\***

IME/USP - CEFETPR

E-mail: rudi@ime.usp.br

**Alexandre Megiorin Roma**

Departamento de Matemática Aplicada - IME/USP

E-mail: roma@ime.usp.br

## 1 Resumo

Quando se aplica um método de projeção às equações de Navier-Stokes em três dimensões, obtém-se uma equação desacoplada para a pressão do tipo

$$\nabla \cdot (w(x, y, z) \nabla \phi(x, y, z)) = f(x, y, z), \quad (1)$$

onde  $(x, y, z) \in \Omega$ ,  $w(x, y, z) = \frac{1}{\rho(x, y, z)}$ , e  $\rho$  é a densidade do fluido.

A equação diferencial parcial elíptica (1), com condições de contorno gerais, é solucionada numericamente no domínio  $\Omega$  discretizado empregando-se uma malha espacial na qual regiões de interesse são refinadas localmente ([1],[2],[7]), concentrando dessa forma o esforço computacional onde ele é mais necessário. O sistema de equações lineares gerado é resolvido através de duas técnicas multinível-multigrid: o ciclo V e o ciclo W ([3],[8]).

## 2 Abstract

When we applied a projection method to the three-dimensional Navier-Stokes equations, we get a disacoupled equation to the pressure of type

$$\nabla \cdot (w(x, y, z) \nabla \phi(x, y, z)) = f(x, y, z), \quad (2)$$

where  $(x, y, z) \in \Omega$ ,  $w(x, y, z) = \frac{1}{\rho(x, y, z)}$ , and  $\rho$  is the density of the fluid.

The elliptic partial differential equation (2), with general boundary conditions, is numerically solved in the domain  $\Omega$  using spatial meshes in

which regions of special interest are locally refined ([1],[2],[7]), thus concentrating the computational effort where is more necessary. The linear system of equations generated is resolved by two multilevel-multigrid techniques: V-cycle and W-cycle ([3],[8]).

## 3 Introdução

As equações de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + F, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4)$$

regem o escoamento de fluidos, o que permite simular vários fenômenos naturais como também processos industriais.

Nessas equações,  $\mathbf{u}$  é o campo de velocidade,  $p$  é um escalar para a pressão,  $\rho$  é a densidade de massa,  $\mu$  é a viscosidade,  $T$  representa o operador transposto e  $F$  é um termo forçante.

Ao se aplicar um método de projeção ([9]) às equações (3) e (4) em três dimensões, obtém-se uma equação para a pressão como a que segue:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(x, y, z)} \nabla \phi(x, y, z) \right) = f(x, y, z). \quad (5)$$

A equação diferencial parcial elíptica (5) é solucionada numericamente empregando-se *diferenças finitas* em um domínio computacional tridimensional  $\Omega$ , com condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann e/ou periódica.

Quando se adota somente condições de Neumann na fronteira, é importante verificar se a condição de integrabilidade ([13]) para a equação

\*bolsista CNPq

(5) é satisfeita. Esta condição é dada pela relação a seguir:

$$\text{para } \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \phi \right) = f \text{ em } \Omega$$

$$\text{com } g = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \text{ em } \partial \Omega$$

$$\iiint_{\Omega} f = \iint_{\partial \Omega} g$$

## 4 Refinamento localizado

Na discretização do domínio espacial  $\Omega$ , utilizamos o refinamento localizado, ou seja, ao invés de refinarmos a malha em todo o domínio, apenas as regiões de interesse (vorticidade, gradientes elevados, etc) têm o passo espacial em cada direção dividido pela metade (a razão de refinamento empregada é sempre dois). Esta estratégia pode reduzir consideravelmente o esforço computacional na resolução das equações (3)-(4) e (5).

O refinamento inicia com a identificação dos pontos da região de interesse no nível físico mais fino. As rotinas desenvolvidas por Berger ([1],[2],[7]) são então utilizadas para gerar os clusters e definir as malhas nos demais níveis físicos.

Para exemplificar, as Figuras 1 a 6 mostram as malhas obtidas para o seguinte caso:

$$\Omega = [-4, 4] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$$

Número de níveis físicos:  $NPL = 3$

Número de níveis virtuais:  $NVL = 4$

Número total de níveis:  $NL = NPL + NVL$

Malhas no nível físico mais fino:  $[-4, -2] \times [-2, 0] \times [-1, 0]$ ,  $[0, 3] \times [-1, 1] \times [0, 0.5]$ ,  $[0, 1] \times [-1, 1] \times [-0.5, 0]$

Passo espacial no nível físico mais fino:  $\Delta x = \frac{8}{2^7}$ ,  $\Delta y = \frac{4}{2^7}$ ,  $\Delta z = \frac{2}{2^7}$

Número de células computacionais em cada direção no primeiro nível virtual:  $2 \times 2 \times 2$

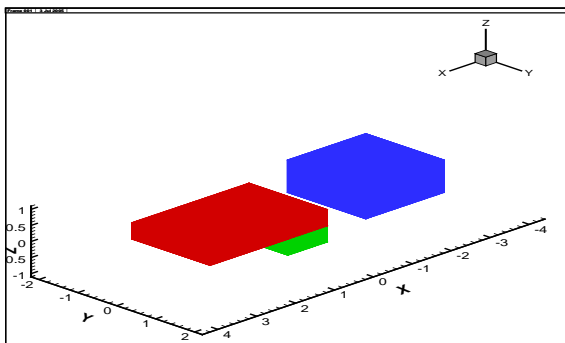


Figura 1: Malhas do terceiro nível físico

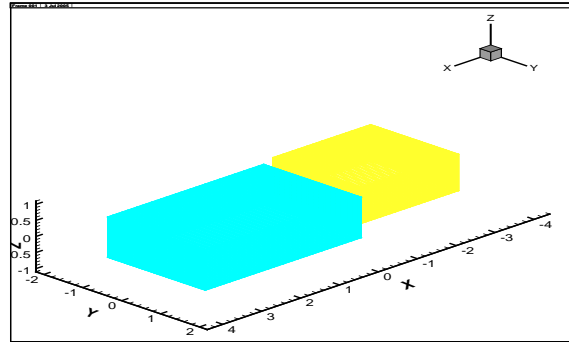


Figura 2: Malhas do segundo nível físico

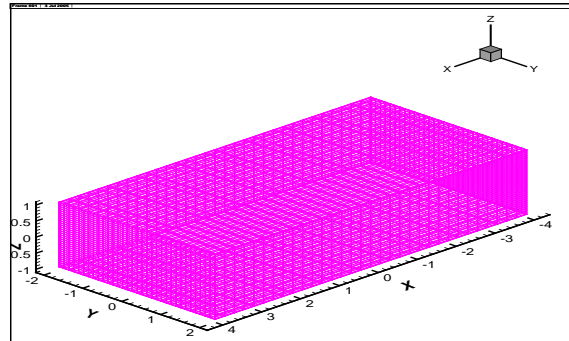


Figura 3: Malha do primeiro nível físico

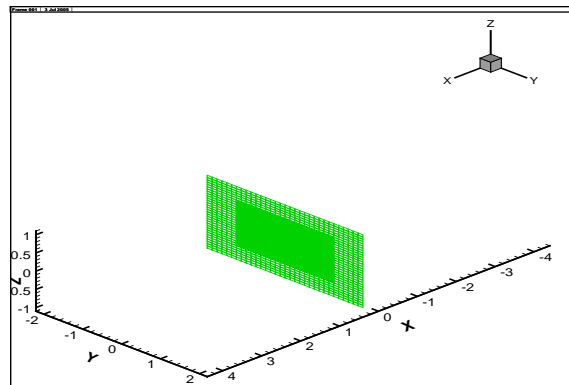


Figura 4: Corte em  $x=0.2$

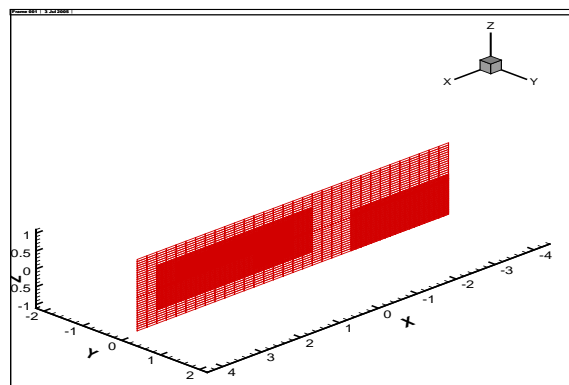


Figura 5: Corte em  $y=0$

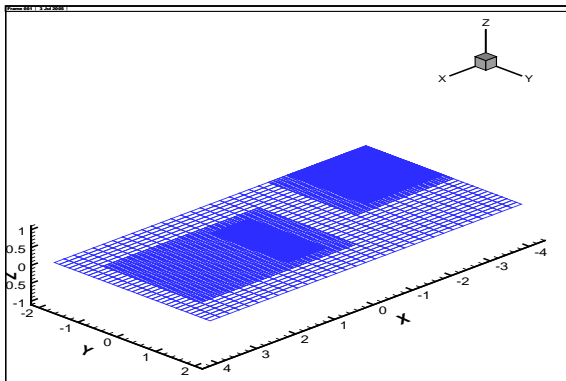


Figura 6: Corte em  $z=0$

## 5 Multinível-multigrid

O emprego de malhas bloco-estruturadas conduz naturalmente a técnicas multigrid para solucionar o sistema de equações lineares gerado na discretização espacial do domínio  $\Omega$ .

Utilizamos duas técnicas multinível-multigrid para amortecer as altas frequências do resíduo: o ciclo V e uma adaptação do ciclo W ([3],[8]). As Figuras 7 e 8 ilustram as duas estratégias para cinco níveis.

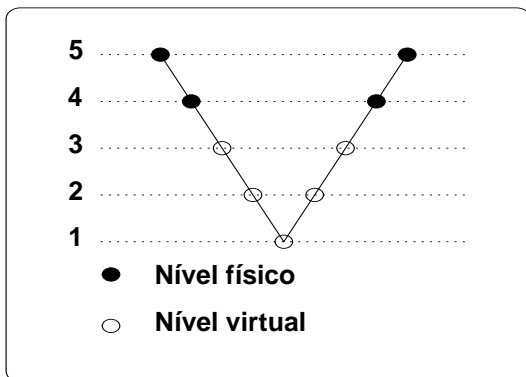


Figura 7: Ciclo V

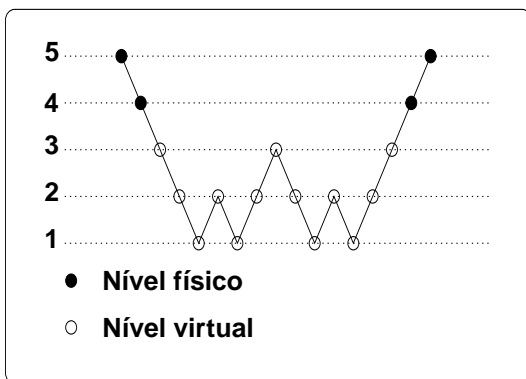


Figura 8: Ciclo W adaptado

Nas Figuras 7 e 8, entenda-se por nível físico o

domínio  $\Omega$  e os níveis de refinamento. O domínio  $\Omega$  representa assim o nível físico mais grosso. Nível virtual é todo nível abaixo do nível físico mais grosso.

Desde o nível físico mais fino, a solução da equação (5) é tratada como um problema de correção, isto é

$$\phi = \phi_{num} + \psi, \quad (6)$$

sendo  $\phi_{num}$  a solução numérica e  $\psi$  a correção.

Substituindo-se (6) em (5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla (\phi_{num} + \psi) \right) &= f \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \psi \right) &= f - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \phi_{num} \right) \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \psi \right) &= r, \end{aligned} \quad (7)$$

na qual  $r$  corresponde ao resíduo.

Para a equação (7), as condições de contorno são sempre homogêneas e as variáveis  $\rho$  e  $\psi$  são calculadas no centro das células computacionais.

Na restrição (operação de descida no multigrid), adotamos uma média simples e no prolongamento (operação de subida no multigrid), uma interpolação trilinear. A correção  $\psi$  é relaxada através de um Gauss-Seidel red-black.

## 6 Testes numéricos

Nos testes apresentados a seguir, relaxamos a correção uma vez na descida e uma vez na subida. No primeiro nível virtual, ao invés de determinarmos a solução exata do sistema linear, a correção é relaxada seis vezes. O critério de parada adotado é

$$\| Res \|_{\infty} < 10^{-8},$$

onde  $Res$  representa o resíduo.

### 1. Teste 1

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= 2x^3 - 3y^3 + z^3 \\ \rho(x, y, z) &= 200x^2 + 200y^2 + 200z^2 + 1 \\ f(x, y, z) &= \frac{-2400x^3 + 3600y^3 - 1200z^3}{(200x^2 + 200y^2 + 200z^2 + 1)^2} + \\ &+ \frac{12x - 18y + 6z}{200x^2 + 200y^2 + 200z^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\text{Número de níveis físicos: } NPL = 2$$

$$\text{Número de níveis virtuais: } NVL = 3, 4, 5$$

$$\text{Número total de níveis: } NL = NPL + NVL$$

$$\text{Malha no nível físico mais fino: } [0, 0.5] \times [0, 0.3] \times [0, 0.6]$$

$$\text{Passo espacial no nível físico mais fino: } H = \Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{2^{NPL+NVL}}$$

$$\text{Número de células computacionais em cada direção no primeiro nível virtual: } 2 \times 2 \times 2$$

NVL	VC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
3	11	$8.89 \times 10^{-9}$	$2.536212 \times 10^{-3}$	
4	12	$4.19 \times 10^{-9}$	$6.513105 \times 10^{-4}$	3.89
5	13	$3.38 \times 10^{-9}$	$1.641978 \times 10^{-4}$	3.97

Tabela 1: *Teste 1* para condições de contorno de Dirichlet, ou seja  $g = \phi$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos V (VC) no multigríd

NVL	WC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
3	11	$7.56 \times 10^{-9}$	$2.536212 \times 10^{-3}$	
4	12	$3.10 \times 10^{-9}$	$6.513105 \times 10^{-4}$	3.89
5	13	$3.20 \times 10^{-9}$	$1.641978 \times 10^{-4}$	3.97

Tabela 2: *Teste 1* para condições de contorno de Dirichlet, ou seja  $g = \phi$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos W (WC) no multigríd

NVL	VC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
3	19	$5.91 \times 10^{-9}$	$2.459094 \times 10^{-5}$	
4	21	$4.38 \times 10^{-9}$	$6.146801 \times 10^{-6}$	4.00
5	22	$7.28 \times 10^{-9}$	$1.536684 \times 10^{-6}$	4.00

Tabela 3: *Teste 1* para condições de contorno de Neumann, ou seja  $g = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos V (VC) no multigríd

NVL	WC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
3	16	$6.92 \times 10^{-9}$	$2.459094 \times 10^{-5}$	
4	17	$3.41 \times 10^{-9}$	$6.146801 \times 10^{-6}$	4.00
5	17	$6.29 \times 10^{-9}$	$1.536684 \times 10^{-6}$	4.00

Tabela 4: *Teste 1* para condições de contorno de Neumann, ou seja  $g = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos W (WC) no multigríd

## 2. Teste 2

$$\phi(x, y, z) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)\cos(2\pi z)$$

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$$

$$f(x, y, z) = \frac{4\pi x \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)\cos(2\pi z)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} +$$

$$+ \frac{4\pi y \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)\cos(2\pi z)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} +$$

$$+ \frac{4\pi z \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)\sin(2\pi z)}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} +$$

$$- \frac{12\pi^2 \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)\cos(2\pi z)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

Número de níveis físicos:  $NPL = 3$

Número de níveis virtuais:  $NVL = 2, 3, 4$

Número total de níveis:  $NL = NPL + NVL$

Malha no nível físico mais fino:  $[0, 0.5] \times [0, 0.3] \times [0, 0.6]$

Passo espacial no nível físico mais fino:  $H = \Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{2^{NPL+NVL}}$

Número de células computacionais em cada direção no primeiro nível virtual:  $2 \times 2 \times 2$

NVL	VC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	15	$4.87 \times 10^{-9}$	$2.123964 \times 10^{-2}$	
3	16	$3.19 \times 10^{-9}$	$5.459181 \times 10^{-3}$	3.89
4	16	$5.57 \times 10^{-9}$	$1.410759 \times 10^{-3}$	3.87

Tabela 5: *Teste 2* para condições de contorno de Dirichlet, ou seja  $g = \phi$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos V (VC) no multigríd

NVL	WC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	15	$6.70 \times 10^{-9}$	$2.123964 \times 10^{-2}$	
3	16	$4.69 \times 10^{-9}$	$5.459181 \times 10^{-3}$	3.89
4	16	$6.50 \times 10^{-9}$	$1.410759 \times 10^{-3}$	3.87

Tabela 6: *Teste 2* para condições de contorno de Dirichlet, ou seja  $g = \phi$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos W (WC) no multigríd

NVL	VC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	23	$6.16 \times 10^{-9}$	$1.342577 \times 10^{-11}$	
3	24	$6.71 \times 10^{-9}$	$1.598884 \times 10^{-5}$	
4	25	$6.34 \times 10^{-9}$	$3.655229 \times 10^{-6}$	4.37

Tabela 7: *Teste 2* para condições de contorno de Neumann, ou seja  $g = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos V (VC) no multigríd

NVL	WC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	23	$3.71 \times 10^{-9}$	$1.369454 \times 10^{-12}$	
3	23	$4.22 \times 10^{-9}$	$1.598884 \times 10^{-5}$	
4	22	$9.04 \times 10^{-9}$	$3.655229 \times 10^{-6}$	4.37

Tabela 8: *Teste 2* para condições de contorno de Neumann, ou seja  $g = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos W (WC) no multigríd

## 3. Teste 3

$$\phi(x, y, z) = \frac{\cos(\pi \frac{x+2}{2}) \sin(\pi \frac{y+1.8}{1.8}) \sin(\pi \frac{z+1.6}{1.6})}{2\pi}$$

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$$

$$f(x, y, z) = \frac{x \sin(\pi \frac{x+2}{2}) \sin(\pi \frac{y+1.8}{1.8}) \sin(\pi \frac{z+1.6}{1.6})}{2(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} +$$

$$- \frac{y \cos(\pi \frac{x+2}{2}) \cos(\pi \frac{y+1.8}{1.8}) \sin(\pi \frac{z+1.6}{1.6})}{1.8(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} +$$

$$- \frac{z \cos(\pi \frac{x+2}{2}) \sin(\pi \frac{y+1.8}{1.8}) \cos(\pi \frac{z+1.6}{1.6})}{1.6(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} +$$

$$- \frac{0.4746334877 \cos(\pi \frac{x+2}{2}) \sin(\pi \frac{y+1.8}{1.8}) \sin(\pi \frac{z+1.6}{1.6})}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

$$\Omega = [-2, 2] \times [-1.8, 1.8] \times [-1.6, 1.6]$$

Número de níveis físicos:  $NPL = 3$

Número de níveis virtuais:  $NVL = 2, 3, 4, 5$

Número total de níveis:  $NL = NPL + NVL$

Malha no nível físico mais fino:  $[0, 0.5] \times [0, 0.3] \times [0, 0.6]$

Passo espacial no nível físico mais fino:

$$\Delta x = \frac{4}{2^{NPL+NVL}}$$

$$\Delta y = \frac{3.6}{2^{NPL+NVL}}$$

$$\Delta z = \frac{3.2}{2^{NPL+NVL}}$$

Número de células computacionais em cada direção no primeiro nível virtual:  $2 \times 2 \times 2$

NVL	VC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	13	$8.15 \times 10^{-9}$	$3.109265 \times 10^{-3}$	
3	15	$2.99 \times 10^{-9}$	$8.632208 \times 10^{-4}$	3.60
4	16	$3.46 \times 10^{-9}$	$2.181267 \times 10^{-4}$	3.96

Tabela 9: *Teste 3* para condições de contorno de Dirichlet, ou seja  $g = \phi$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos V (VC) no multigrid

NVL	WC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	13	$8.03 \times 10^{-9}$	$3.109265 \times 10^{-3}$	
3	15	$2.90 \times 10^{-9}$	$8.632208 \times 10^{-4}$	3.60
4	16	$3.73 \times 10^{-9}$	$2.182670 \times 10^{-4}$	3.95

Tabela 10: *Teste 3* para condições de contorno de Dirichlet, ou seja  $g = \phi$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos W (WC) no multigrid

NVL	VC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	59	$8.28 \times 10^{-9}$	$1.797607 \times 10^{-5}$	
3	59	$8.97 \times 10^{-9}$	$7.878647 \times 10^{-6}$	2.28
4	62	$9.43 \times 10^{-9}$	$3.543893 \times 10^{-6}$	2.22
5	66	$9.83 \times 10^{-9}$	$1.086447 \times 10^{-6}$	3.26

Tabela 11: *Teste 3* para condições de contorno de Neumann, ou seja  $g = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos V (VC) no multigrid

NVL	WC	$\ Res\ _\infty$	$\ \phi - \phi_{num}\ _2$	R
2	68	$8.39 \times 10^{-9}$	$1.797606 \times 10^{-5}$	
3	46	$8.41 \times 10^{-9}$	$7.878634 \times 10^{-6}$	2.28
4	27	$9.12 \times 10^{-9}$	$3.543893 \times 10^{-6}$	2.22
5	20	$3.68 \times 10^{-9}$	$1.086447 \times 10^{-6}$	3.26

Tabela 12: *Teste 3* para condições de contorno de Neumann, ou seja  $g = \frac{\partial\phi}{\partial\eta}$  em  $\partial\Omega$ , e número de ciclos W (WC) no multigrid

## 7 Conclusões

Nos testes numéricos apresentados,  $R$  corresponde à razão entre as normas do erro absoluto ( $\|\phi - \phi_{num}\|_2$ ) em uma etapa de refinamento. O que se espera é que

$$\log_2 R \longrightarrow 2, \quad (8)$$

sendo 2 a ordem da discretização empregada na solução da equação (5).

A relação (8) caracteriza uma análise de convergência baseada na extrapolação de Richardson [11], sendo observada na maioria dos testes relacionados anteriormente ( $R \longrightarrow 4$ ).

Quando  $\Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z$ , nota-se que o número de ciclos  $V$  ou  $W$  necessários para se atingir

$$\|Res\|_\infty < 10^{-8}$$

aumenta. Neste caso, para amortecer ainda mais as altas frequências do resíduo, poder-se-ia empregar a relaxação por linha, o que implica na

solução de um sistema tridiagonal, ao invés da relaxação adotada (Gauss-Seidel red-black).

Para condições de contorno do tipo Dirichlet, a solução se comporta bem mesmo para grandes variações de densidade. O mesmo já não ocorre para condições de contorno do tipo Neumann, o que também poderia ser contornado com o uso da relaxação por linha.

Ao se comparar as estratégias  $V$  e  $W$ , o número de ciclos é o mesmo para condições de contorno de Dirichlet. Para condições de contorno de Neumann, o número de ciclos  $W$  é muito menor que o número de ciclos  $V$  quando  $\Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z$ .

## Referências

- [1] BERGER, Marsha. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, v. 82, p. 64-84, 1989.
- [2] BERGER, Marsha; RIGOUTSOS, Isidore. An algorithm for point clustering and grid generation. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, v. 21, n. 5, p. 1278-1286, 1991.
- [3] BRIGGS, William L. *A multigrid tutorial*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [4] ELLIS, T. M. R. et al. *Fortran 90 programming*. [S.l.] : Addison-Wesley, 1994.
- [5] FORTUNA, Armando de Oliveira. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos - Conceitos básicos e aplicações*. São Paulo : Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- [6] JOHN, Fritz. *Partial differential equations*. 4th ed. New York : Springer-Verlag, 1982.
- [7] LEVEQUE, Randall J. et al. *Clawpack version 4.2 user's guide*. University of Washington, 2003. <http://www.amath.washington.edu/~claw/>
- [8] MCCORMICK, S. F. *Multigrid methods*. Frontiers in Applied Mathematics, v. 3. Philadelphia : SIAM Books, 1987.
- [9] PEYRET, Roger; TAYLOR, Thomas D. *Computational methods for fluid flow*. New York : Springer-Verlag, 1983.
- [10] PRESS, William et al. *Numerical recipes in fortran 77: the art of scientific computing*. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1992.
- [11] ROMA, Alexandre M. *A multilevel self adaptive version of the immersed boundary method*. PhD thesis, New York University, 1996.

- [12] ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. J. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 153, p. 509-534, 1999.
- [13] STRICKWERDA, John C. *Finite difference schemes and partial differential equations*. New York : Chapman & Hall, 1989.
- [14] ZHANG, Jun. A cost-effective multigrid projection operator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 76, p. 325-333, 1996.