

Modelo Matemático de Armaduras Longitudinais e Transversais em Pilares como Placa Ortotrópica

Saete Souza de Oliveira Buffoni

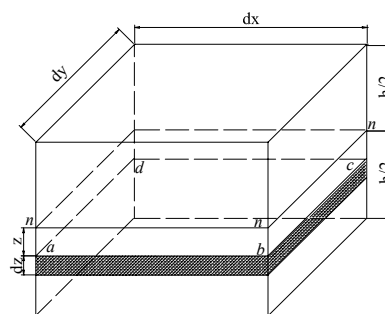
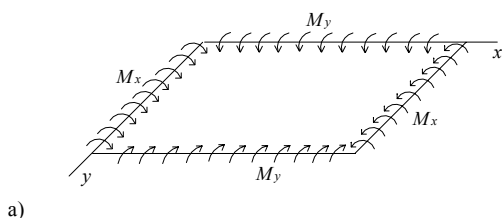
Professora Adunta
 Depto de Ciências dos Materiais, EEMVR, UFF,
 27255-125, Volta Redonda, RJ
 E-mail: saute@vm.uff.br

Raul Rosas e Silva

Professor Associado
 Depto de Engenharia Civil, PUC-RIO
 22453-900, Rio de Janeiro, RJ
 E-mail: raul@civ.puc-rio.br

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um modelo matemático que permita analisar a flambagem das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado submetidos a carregamento axial levando em conta o espaçamento entre os estribos, o diâmetro e arranjo dos estribos na seção transversal e o diâmetro das armaduras longitudinais. Para este propósito um método analítico para a avaliação da flambagem da armadura longitudinal é proposto, considerando-se as barras longitudinais restringidas pela rigidez axial ou à flexão dos estribos. Consideram-se duas formas de modelagem da atuação dos estribos: como apoios elásticos discretos e como base elástica contínua. O presente trabalho trata a coluna com um ou mais modos de deformação, incluindo certas não-linearidades. Um possível aperfeiçoamento, no caso de grande número de barras longitudinais seria a consideração do conjunto de armaduras longitudinais e transversais como uma grelha. Apresenta-se neste trabalho a formulação adotada e expressões para a carga crítica. Detalhes podem ser obtidos no trabalho de Buffoni [2].

Para a consideração de grelha utilizou-se a formulação de placas ortotrópicas onde as propriedades elásticas do material são diferentes em todas as direções. Considerando-se que as direções principais de ortotropia coincidem com os eixos coordenados x e y , tem-se quatro constantes elásticas (E_x, E_y, ν_x, ν_y) que são requeridas para o desenvolvimento das relações tensão-deformação ortotrópicas. A flexão pura de uma placa retangular é composta por momentos que são uniformemente distribuídos ao longo dos lados da placa como apresenta a Figura 1.



b)

Figura 1: Flexão pura de placas.

O momento fletor por unidade de comprimento das arestas paralelas ao eixo y é chamado de M_x e o momento fletor por unidade de comprimento das arestas paralelas ao eixo x é chamado de M_y . Esses momentos são considerados positivos quando eles produzem compressão na parte superior da placa e tração na parte de inferior.

Considerando-se o elemento hachurado da placa na Figura 1.b e supondo que durante a flexão da placa, as faces laterais deste elemento permanecem planas e rotacionam em torno do eixo neutro $n-n$, permanecendo normal a superfície deformada, conclui-se que o plano médio da placa não sofre deformação durante a flexão e é, portanto, uma superfície neutra. As curvaturas da superfície neutra são dadas por:

$$\frac{1}{\rho_x} \text{ e } \frac{1}{\rho_y} \quad (1)$$

Dessa forma, as deformações unitárias nas direções x e y de um elemento de lâmina $abcd$ na Figura 1.b podem ser descritas como no caso de vigas e são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \text{ e } \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y} \quad (2)$$

Da lei de Hooke tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} \end{aligned} \quad (3)$$

onde ν_x e ν_y são os coeficientes de Poisson. Resolvendo-se (3) para σ_x e σ_y chega-se a:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}(\varepsilon_x + \nu_y\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}(\varepsilon_y + \nu_x\varepsilon_x)\end{aligned}\quad (4)$$

As expressões dos momentos externos são:

$$\begin{aligned}M_x &= D_x\left(\frac{1}{\rho_x} + \nu_y\frac{1}{\rho_y}\right) \\ M_y &= D_y\left(\frac{1}{\rho_y} + \nu_x\frac{1}{\rho_x}\right)\end{aligned}\quad (5)$$

onde D_x e D_y são as rigidezes à flexão da placa.

A deflexão da placa é denotada por w e as expressões para a curvatura da placa são análogas às fórmulas conhecidas da curvatura da viga e são dadas por:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ e } \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\quad (6)$$

Substituindo-se a expressão (6) nos momentos externos da expressão (5) tem-se:

$$\begin{aligned}M_x &= -D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\quad (7)$$

Na flexão pura quando uma placa é fletida por momentos de flexão distribuídos uniformemente, M_x e M_y como na Figura 1.a, A energia de deformação é obtida calculando-se o trabalho realizado pelos momentos $M_x dy$ e $M_y dx$ sobre o elemento durante a flexão da placa

Desde que os lados do elemento permaneçam planos, o trabalho realizado pelo momento $M_x dy$ é obtido tomando-se a metade do produto do momento e o ângulo entre os lados do elemento após a flexão. $-\partial^2 w/\partial x^2$ representa a curvatura da placa no plano xz . O ângulo correspondente aos momentos $M_x dy$ é $(-\partial^2 w/\partial x^2)dx$ e o trabalho realizado por esse momento é:

$$-\frac{1}{2}M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy\quad (8)$$

Para o momento $M_y dx$ tem-se:

$$-\frac{1}{2}M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy\quad (9)$$

O trabalho total é a energia potencial do elemento e é dado por:

$$dU_f = -\frac{1}{2}\left(M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy\quad (10)$$

Substituindo-se (7) em (10) chega-se a:

$$\begin{aligned}dU_f &= \frac{1}{2}\left[D_x\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + D_y\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \nu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\end{aligned}\quad (11)$$

A energia de deformação da placa pode ser obtida por integração da expressão (11).

$$\begin{aligned}U_f &= \iint\frac{1}{2}\left[D_x\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + D_y\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \nu_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\end{aligned}\quad (12)$$

A energia U_o devida à deformação no plano médio da placa que ocorre por causa das forças aplicadas neste plano, N_x , N_y e N_{xy} é:

$$U_o = \frac{1}{2}\iint(N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + N_{xy}\gamma_{xy})dxdy\quad (13)$$

Na discussão de pequenas deflexões de placas, considera-se N_x , N_y e N_{xy} como constantes. Aplicando-se alguma carga lateral que produza flexão na placa, tem-se que os três componentes nas direções x , y e z do deslocamento de algum ponto da superfície média da placa durante a flexão são u , v e w , respectivamente.

Considerando-se um elemento linear AB do plano como na Figura 2, nota-se que a deformação do elemento devido o deslocamento u na direção x é igual a $(\partial u/\partial x)dx$. A deformação do mesmo elemento devida ao deslocamento w é $\frac{1}{2}(\partial w/\partial x)^2 dx$. Dessa forma a deformação unitária nas direções x e y de um elemento do plano médio da placa são, respectivamente:

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\quad (14)$$

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\quad (15)$$

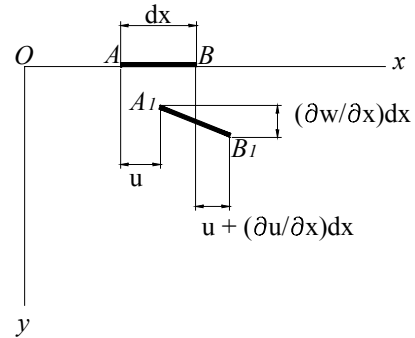


Figura 2: Elemento linear.

Desprezando a deformação que leva em conta o esforço cortante, a energia de deformação do carregamento externo torna-se:

$$U_o = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy \quad (16)$$

$$+ \frac{I}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Se na discussão sobre flexão de placas forem negligenciadas as deformações u e v no plano médio, tem-se que o potencial das cargas externas torna-se:

$$U_o = -\frac{I}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (17)$$

A energia potencial total é dada por:

$$\Pi = U_f + U_o \quad (18)$$

Dessa forma, tem-se a seguinte expressão para a energia potencial total:

$$\Pi = \frac{I}{2} \iint \left\{ \left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ \left. + (D_x v_y + D_y v_x - 2\sqrt{D_x D_y}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2(I - \sqrt{v_x v_y}) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (19)$$

$$- \frac{I}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

No caso de uma placa retangular com arestas simplesmente apoiadas, a superfície de deflexão pode ser representada por uma série trigonométrica dupla.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (20)$$

Cada termo da série desaparece para $x=0$, $x=a$ e também para $y=0$ e $y=b$ e assim a deflexão é zero ao longo do contorno.

O caso apresentado na Figura 3 representa o modelo de uma face da coluna de concreto armado composta apenas pelas armaduras longitudinais e transversais, portanto, sem a consideração do concreto. Na Figura 3, as armaduras longitudinais e transversais são consideradas como uma grelha que foi aproximada por uma placa ortotrópica equivalente.

Partindo-se da eq. (19), a energia potencial total para esse caso é dada por:

$$\Pi = \frac{I}{2} \iint \left\{ \left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ \left. + (D_x v_y + D_y v_x - 2\sqrt{D_x D_y}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2(I - \sqrt{v_x v_y}) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

$$+ 2(I - \sqrt{v_x v_y}) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \Bigg\} dx dy \quad (21)$$

$$- \frac{I}{2} \iint N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

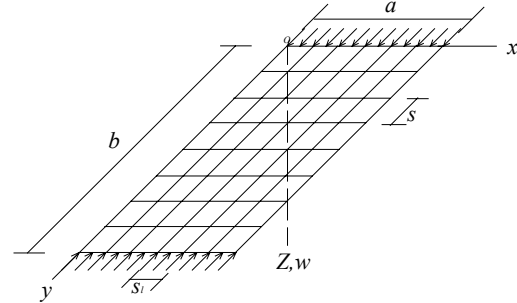


Figura 3: Consideração das armaduras longitudinais e transversais como uma grelha.

Substituindo-se (20) em (21) e integrando-se no domínio, obtém-se uma forma quadrática em termos dos deslocamentos de onde se obtém as equações de equilíbrio e a carga crítica que é dada pela expressão a seguir:

$$N_y = \frac{\pi^2 (m^4 b^4 D_x + 2m^2 n^2 a^2 b^2 \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + n^4 a^4 D_y)}{n^2 a^4 b^2} \quad (22)$$

O menor valor de N_y é obtido para $m=1$, nesse caso a placa flamba com somente uma onda na direção perpendicular ao carregamento. A expressão para esse caso é:

$$N_y = \frac{\pi^2 (b^4 D_x + 2n^2 a^2 b^2 \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + n^4 a^4 D_y)}{n^2 a^4 b^2} \quad (23)$$

Simplificando a expressão (23) tem-se:

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(\frac{\sqrt{D_x} b}{n} + \sqrt{D_y} \frac{a}{b} n \right)^2 \quad (24)$$

O valor mínimo de N_y é obtido calculando-se $\partial N_y / \partial \bar{b} = 0$, sendo $\bar{b} = b/n$, obtendo-se então $\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}$. A carga crítica mínima é dada por:

$$N_y = \frac{4\pi^2}{a^2} \sqrt{D_x D_y} \quad (25)$$

Considerando-se que a grelha da Figura 3 seja aproximada por uma placa ortotrópica equivalente que é constituída por vigas paralelas com mesmo espaçamento, pode-se usar as seguintes propriedades:

$$D_x = \frac{EI_t}{s} = \frac{E\pi\phi_t^4}{64s} \quad (26)$$

$$D_y = \frac{EI_s}{s_1} = \frac{E\pi\phi_s^4}{64s_1} \quad (27)$$

D_x é a rigidez na direção x que leva em conta os estribos, onde I_l é o momento de inércia dos estribos e s o espaçamento entre estribos, já D_y é a rigidez na direção y que leva em conta a armadura longitudinal, onde I_s é o momento de inércia da armadura longitudinal e s_l o espaçamento entre as armaduras longitudinais. Considerando-se que a placa da Figura 3 seja submetida apenas à flexão tem-se que o funcional é dado pela expressão (12). Substituindo-se (20) em (12) e integrando-se no domínio, obtém-se uma forma quadrática em termos dos deslocamentos de onde se obtém as equações de equilíbrio e a carga crítica é dada pela seguinte expressão:

$$N_y = \frac{\pi^2 (m^4 b^4 D_x + n^4 a^4 D_y)}{n^2 a^4 b^2} \quad (28)$$

O menor valor de N_y é obtido para $m=1$ como apresenta a equação (29), nesse caso a placa flamba em uma onda na direção perpendicular ao carregamento.

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(D_x \frac{b^2}{n^2 a^2} + D_y \frac{n^2 a^2}{b^2} \right) \quad (29)$$

Substituindo-se $\frac{b}{n} = \bar{b}$ na expressão (29) tem-se:

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(D_x \frac{\bar{b}^2}{a^2} + D_y \frac{a^2}{\bar{b}^2} \right) \quad (30)$$

O menor valor para a carga crítica é obtido quando $\frac{\partial N_y}{\partial \bar{b}} = 0$ e assim obtém-se:

$$\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} \quad (31)$$

Substituindo-se (31) em (30) o valor da carga crítica fica:

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(2\sqrt{D_x D_y} \right) \quad (32)$$

Apresenta-se o cálculo da carga crítica para três pilares estudados no trabalho de Buffoni [2] considerando-se o conjunto das armaduras longitudinais e transversais como uma placa ortotrópica. Vale ressaltar que a carga é calculada considerando-se apenas uma face do pilar. A seguir apresentam-se três casos.

Caso 1

O primeiro caso estudado foi o Pilar P1 de Queiroga [5] como apresenta a Figura 4. Os dados necessários para o cálculo da carga crítica são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} \phi_l &= 12,5 \text{ mm} & \phi_s &= 6,3 \text{ mm} & s_l &= 69,95 \text{ mm} \\ L &= (1200-17,5-17,5-6,3) = 1158,7 \text{ mm} \\ a &= (200-2 \times 17,5-2 \times 6,3-12,5) = 139,9 \text{ mm} \\ s &= 150 \text{ mm} & f_{yk} &= 502 \text{ MPa} & \gamma_s &= 1,15 \end{aligned}$$

$$E = 210000 \text{ N/mm}^2 \quad f_{yd} = \frac{502}{1,15} = 436,5 \text{ MPa}$$

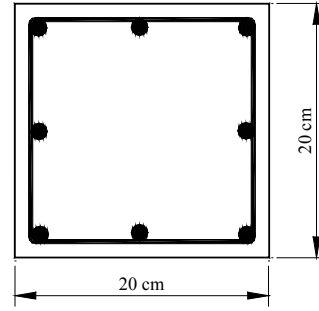


Figura 4: **Caso 1:** Seção e arranjo da armadura na seção dos pilares ensaiados por Queiroga (1999).

Os valores de D_x e D_y são:

$$D_x = \frac{EI_l}{s} = \frac{E\pi\phi_l^4}{64s} = 108258,0331 \text{ N mm} \quad (33)$$

$$D_y = \frac{EI_s}{s_l} = \frac{E\pi\phi_s^4}{64s_l} = 3597837,356 \text{ N mm} \quad (34)$$

O comprimento de onda $\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} = 2,40$, onde

$\bar{b} = a \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} = 335,9 \text{ mm}$ é aproximadamente duas vezes o espaçamento entre estribos. Substituindo-se (33) e (34) na expressão (32) e multiplicando-se por a tem-se:

$$N_{cry} = 88056,79 \text{ N} \approx 88,05 \text{ kN} \quad (35)$$

Dividindo-se este valor por três barras chega-se a:

$$N_{cry1} = 29,35 \text{ kN} \quad (36)$$

Caso seja considerada para a carga crítica a expressão que leva em conta os momentos de torção da expressão (25) tem-se o seguinte valor:

$$N_{cry} = 176,12 \text{ kN} \quad (37)$$

Dividindo-se este valor por três barras chega-se a:

$$N_{cry1} = 58,70 \text{ kN} \quad (38)$$

A carga crítica para a base elástica é dada por:

$$N_{cry1} = 94,70 \text{ kN} \quad (39)$$

O valor da carga de compressão P_y de cada barra é:

$$P_y = f_{yd} A_s = \frac{502}{1,15} \cdot 125 = 54,57 \text{ kN} \quad (40)$$

Caso 2

O caso estudado apresenta-se na Figura 5 e os dados para o pilar em questão são dados a seguir:

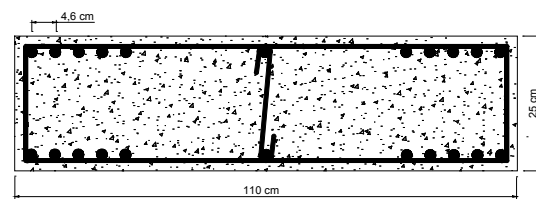


Figura 5: **Caso 2:** Arranjo das armaduras na seção transversal.

$$\phi_l = 25 \text{ mm} \quad \phi_t = 6,3 \text{ mm} \quad s = 200 \text{ mm}$$

$$L = (2550 - 2 \times 30) = 2490 \text{ mm}$$

$$a = 1202,4 \text{ mm} \quad s_l = 109,31 \text{ mm} \quad \gamma_s = 1,15$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} \quad E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

Os valores de D_x e D_y são:

$$D_x = \frac{EI_t}{s} = \frac{E\pi\phi_t^4}{64s} = 81193,53 \text{ Nmm} \quad (41)$$

$$D_y = \frac{EI_s}{s_l} = \frac{E\pi\phi_l^4}{64s_l} = 36837430,88 \text{ Nmm} \quad (42)$$

O comprimento de onda $\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} = 4,60 \Rightarrow$

$$\bar{b} = a \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} = 5549 \text{ mm} \text{ corresponde a vinte e sete}$$

vezes o espaçamento entre estribos.

Substituindo-se (41) e (42) na expressão (32) e multiplicando-se por a tem-se a seguinte expressão para a carga crítica:

$$N_{cry} = 28,4 \text{ kN} \quad (43)$$

Dividindo-se este valor por doze barras chega-se a:

$$N_{cry1} = 2,4 \text{ kN} \quad (44)$$

Caso se considere para a carga crítica a expressão que leva em conta os momentos de torção na expressão (25) tem-se o seguinte valor para a carga crítica.

$$N_{cry} = 113,6 \text{ kN} \quad (45)$$

Dividindo-se este valor por doze barras chega-se a:

$$N_{cry1} = 9,47 \text{ kN} \quad (46)$$

A carga crítica para a base elástica é dada por:

$$N_{cry1} = 26,6 \text{ kN} \quad (47)$$

O valor da carga de compressão P_y de cada barra é:

$$P_y = f_{yd} A_s = \frac{500}{1,15} 490,87 = 213,4 \text{ kN} \quad (48)$$

Caso 3

O caso estudado apresenta-se na Figura 6 e os dados para o pilar em questão são dados a seguir:

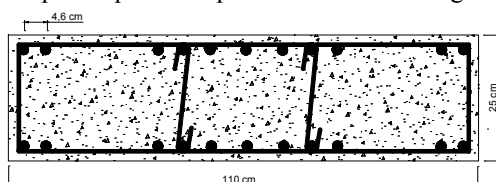


Figura 6: **Caso 3:** Arranjo das armaduras na seção transversal.

$$\phi_l = 25 \text{ mm} \quad \phi_t = 10 \text{ mm} \quad s = 200 \text{ mm}$$

$$L = 2490 \text{ mm} \quad a = 327,93 \text{ mm} \quad s_l = 109,31 \text{ mm}$$

$$\gamma_s = 1,15 \quad f_{yk} = 500 \text{ MPa} \quad E = 210000 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa} . \text{ Os valores de } D_x \text{ e } D_y \text{ são:}$$

$$D_x = \frac{EI_t}{s} = \frac{E\pi\phi_t^4}{64s} = 515417,55 \text{ Nmm} \quad (49)$$

$$D_y = \frac{EI_s}{s_l} = \frac{E\pi\phi_l^4}{64s_l} = 36837430,88 \text{ Nmm} \quad (50)$$

O comprimento de onda $\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} = 2,91 \Rightarrow$

$$\bar{b} = a \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} = 953,5 \text{ mm} \text{ corresponde aproximadamente a}$$

três vezes o espaçamento entre estribos. Substituindo-se (49) e (50) na expressão (32) e multiplicando-se por a chega-se a:

$$N_{cry} = 262,3 \text{ kN} \quad (51)$$

Dividindo-se este valor por quatro barras chega-se a:

$$N_{cry1} = 65,6 \text{ kN} \quad (52)$$

Caso se considere para a carga crítica a expressão que leva em conta os momentos torçores expressa em (25) tem-se o seguinte valor para a carga crítica:

$$N_{cry} = 524,6 \text{ kN} \quad (53)$$

Dividindo-se este valor por doze barras chega-se a:

$$N_{cry1} = 131,2 \text{ kN} \quad (54)$$

A carga crítica para a base elástica é dada por:

$$N_{cry1} = 236,7 \text{ kN} \quad (55)$$

O valor da carga de compressão P_y de cada barra é:

$$P_y = f_{yd} A_s = \frac{500}{1,15} 490,87 = 213,4 \text{ kN} \quad (56)$$

Os resultados obtidos com o uso do modelo simplificado da placa ortotrópica são razoáveis, mas ainda conservadores indicando que há necessidade de aperfeiçoamento nesse modelo.

Referências

- [1] Z. P. Bazant; L. Cedolin “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage theories”, Oxford University Press, New York, 1991.
- [2] S. S. O. Buffoni, Estudo da Flambagem de Armaduras Longitudinais em Colunas de Concreto Armado, Tese de Doutorado. PUC-Rio, 2004
- [3] J. W. H. King The Effect of Lateral Reinforcement in Reinforced Concrete Columns. *The Structural Engineer*, Vol. 24, Jul. p. 355-388, 1946.
- [4] M. V. M. Queiroga Análise Experimental de Pilares de Concreto de Alto Desempenho Submetidos à Compressão Simples. Dissertação de Mestrado, EESC – USP, 1999.
- [5] S. P. Timoshenko; J. M. Gere “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill, 2. Edit., Singapore, 1961.