

Aplicação do Método Físico Virtual para a interação fluido-estrutura rígida

Santos Alberto Enriquez-Remigio, Alexandre Megiorin Roma,

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Rua do Matão, 1010
São Paulo-SP
e-mail: remigio@ime.usp.br, roma@ime.usp.br,

Aristeu da Silveira-Neto

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica
Av. João Naves de Ávila.
Campus Santa Mônica
Uberlândia-MG
e-mail: aristeus@mecanica.ufu.br.

Resumo

Métodos da fronteira imersa representam uma alternativa para desenvolver estudos de interação fluido-estrutura rígida. Um novo método de fronteira imersa foi proposto por Lima e Silva et al. [6], o Método Físico Virtual (MFV). A aplicabilidade desse método foi mostrada em alguns trabalhos para problemas bidimensionais com estruturas rígidas em repouso e em movimento prescrito. Neste trabalho apresentam-se os resultados de duas simulações bidimensionais obtidas através do MFV: escoamento de Couette circular (interação parcial) e interação de um pêndulo imerso em um fluido (interação total). Resultados são quantitativamente e/ou qualitativamente coerentes com a física do problema.

Palavras chaves: Método Físico Virtual; Método da fronteira imersa; Couette circular; Runge-Kutta explícito.

1 Introdução

Interações fluido-estrutura são fenômenos físicos presentes na natureza, como por exemplo, a interação do sangue com as válvulas naturais ou artificiais do coração humano; a sedimentação de partículas em um fluido, etc.

Várias metodologias matemáticas são usadas para estudar interações fluido-estrutura. Destas, duas são freqüentemente usadas e estão baseadas em métodos convencionais e em métodos da fronteira imersa [8].

Os métodos da fronteira imersa tem por base o uso de duas malhas computacionais: malha euleri-

ana, para o fluido e malha lagrangiana para o contorno da estrutura rígida. A imposição da presença da estrutura nas equações do fluido é feita através de um termo forçante [11, 3, 6] e/ou modificação da solução ao redor da interface [9, 14, 7]. As vantagens dos métodos da fronteira imersa são: a facilidade para lidar com estruturas geométricas complexas e o baixo custo computacional [5].

Um novo método da fronteira imersa foi proposto por Lima e Silva [6], o Método Físico Virtual (MFV). Este pertence à classe de métodos da fronteira imersa que impõe a presença da estrutura através de um termo forçante. No MFV, o termo forçante é baseado na lei de conservação do momento, diferente de outros métodos cujos termos forçantes dependem de parâmetros a serem determinados [11, 3]. A aplicabilidade desse método foi mostrada em alguns trabalhos para problemas bidimensionais com estruturas rígidas em repouso [6, 1] e em movimento prescrito [1, 12, 10].

O objetivo deste trabalho é mostrar a aplicabilidade do MFV para problemas de interação parcial e total através de dois problemas conhecidos. Para tal este trabalho é organizado da seguinte forma: o modelo matemático para o sistema fluido-estrutura rígida é apresentado na Seção 2. Na Seção 3 é apresentada a metodologia numérica empregada para resolv-lo. Os problemas simulados e os resultados obtidos são apresentados na Seção 4. Finalmente, na Seção 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2 Modelo matemático

Nesta seção, apresenta-se o modelo matemático baseado no MFV [6] para a interação entre um fluido viscoso e incompressível com uma estrutura rígida em um domínio $\Omega \in \mathbf{R}^2$. Este modelo está composto por:

1. Equações de Navier-Stokes com termo forçante para o fluido:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \{2\mu \mathbf{d}\} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

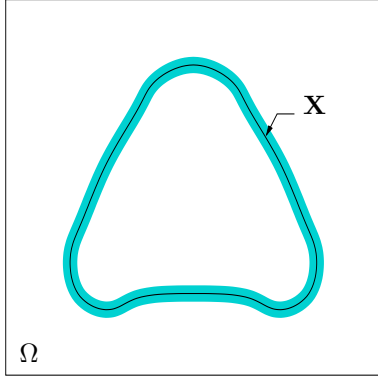


Figura 1: A região cinza ao redor da interface \mathbf{X} (contorno da estrutura rígida) é a região de ação do termo forçante.

onde: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p = p(\mathbf{x}, t)$ representam a velocidade e a pressão do fluido na posição \mathbf{x} e no tempo t ; ρ e μ são a densidade de massa e o coeficiente de viscosidade do fluido; $\mathbf{d} = \frac{(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t)}{2}$ é o tensor de deformação; \mathbf{f} é o termo forçante que impõe a presença da estrutura no fluido (Figura 1).

2. Equações de Newton-Euler para a estrutura rígida, neste caso com respeito ao centro de massa

$$M_c \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} = \mathbf{G}_c + \mathbf{F}_{TFC}, \quad (3)$$

$$I_c \frac{d}{dt}(w) = T_{TFC}, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_c}{dt} = \mathbf{V}_c, \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w, \quad (6)$$

onde: M_c , I_c são a massa e o momento de inércia; \mathbf{V}_c e w são a velocidade de translação do centro de massa e a velocidade angular do corpo; \mathbf{X}_c e θ são a posição do centro de massa e do ângulo de rotação; \mathbf{G}_c é o peso do corpo; \mathbf{F}_{TFC} e T_{TFC} é a força total de ação do fluido no corpo e o torque total produzido pelas forças externas ao corpo.

Algumas diferenças do MFV com outros métodos baseados no uso de um termo forçante são:

- forma de se obter a densidade de força euleriana \mathbf{f} : através da distribuição das forças calculadas na interface
- princípio físico para se obter a densidade de força lagrangiana \mathbf{F} : lei de conservação de momento nos pontos da interface
- expressões simples para o cálculo dos termos \mathbf{F}_{TFC} e T_{TFC} devido à natureza da força \mathbf{F} e a terceira lei de Newton

Seja \mathbf{X}_k um ponto da interface \mathbf{X} , $k = 1, \dots, N_{pl}$ ($\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{N_{pl}}$). Então as expressões para a \mathbf{f} , \mathbf{F} , \mathbf{F}_{TFC} e T_{TFC} são:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_{pl}} \mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{X}_k) (\Delta s_k)^2, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t) = \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \mathbf{d}) \right) \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_{TFC} = \sum_{k=1}^{N_{pl}} (-\mathbf{F}_k \Delta s_k \Delta s_k) \quad (9)$$

$$\mathbf{T}_{TFC} = \sum_{k=1}^{N_{pl}} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_c) \times (-\mathbf{F}_k \Delta s_k \Delta s_k) \quad (10)$$

onde: $\Delta s_k = \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k+1}\|$ e a função δ é uma aproximação suave do delta de Dirac bidimensional.

3 Método numérico

Neste trabalho as equações do modelo matemático para o sistema fluido-estrutura rígida são resolvidas através de um método de Runge-Kutta explícito de segunda ordem no tempo (RKE2) com discretização especial de segunda ordem baseado no método de diferenças finitas. As variáveis do fluido são distribuídas numa malha MAC regular.

Em cada estágio do RKE2 resolvem-se as equações do fluido e as equações do corpo rígido. As equações do fluido são resolvidas mediante um método de projeção. O algoritmo do estágio l ($=1, 2$) do RKE2 aplicado é:

Dados: $\mathbf{X}_k, \mathbf{V}_c, w, \mathbf{X}_c, \theta$ e $\mathbf{u}, q \approx p$ em $t_{n+\frac{l-1}{2}}$:

1. Calcula-se $\mathbf{F}^{n+\frac{l-1}{2}}$ e $\mathbf{f}^{n+\frac{l-1}{2}}$.

2. Calcula-se $(\mathbf{u}^*)^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{(\mathbf{u}^*)^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^n}{\alpha_l \Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{l-1}{2}} \right) &= \\ -\nabla q^{n+\frac{l-1}{2}} + \nabla \cdot [2\mu \mathbf{d}]^{n+\frac{l-1}{2}} + \mathbf{f}^{n+\frac{l-1}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

3. Determinam-se $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ e $p^{n+\frac{l-1}{2}}$:

$$(\mathbf{u}^*)^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_l \Delta t}{\rho} \nabla \phi_l, \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (13)$$

$$p^{n+\frac{l-1}{2}} = q^{n+\frac{l-1}{2}} + \phi_l. \quad (14)$$

4. Calcula-se $\mathbf{F}_{TFC}^{n+\frac{l-1}{2}}$ e $\mathbf{T}_{TFC}^{n+\frac{l-1}{2}}$.

5. Determine-se $\mathbf{V}_c^{n+\frac{1}{2}}$ e $w^{n+\frac{1}{2}}$:

$$M_c \left(\frac{\mathbf{V}_c^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{V}_c^n}{\alpha_l \Delta t} \right) = \mathbf{G}_c + \mathbf{F}_{TFC}^{n+\frac{l-1}{2}}, \quad (15)$$

$$I_c \left(\frac{w^{n+\frac{1}{2}} - w^n}{\alpha_l \Delta t} \right) = \mathbf{T}_{TFC}^{n+\frac{l-1}{2}}. \quad (16)$$

6. Determina-se $\mathbf{X}_c^{n+\frac{1}{2}}$ e $\theta^{n+\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\mathbf{X}_c^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{X}_c^n}{\alpha_l \Delta t} = \mathbf{V}_c^{n+\frac{l-1}{2}}, \quad (17)$$

$$\frac{\theta^{n+\frac{1}{2}} - \theta^n}{\alpha_l \Delta t} = w^{n+\frac{l-1}{2}}, \quad (18)$$

onde: $\alpha_1 = 0.5$ e $\alpha_2 = 1.0$.

A equação (12) e (13) do passo 3 do algoritmo gera uma equação de Poisson para ϕ_l . E esta equação é resolvida usando-se rotinas do FISHPACK [13].

A avaliação das derivadas temporais e espaciais da densidade de força lagrangiana, equação (8), é feita segundo a proposta de Lima e Silva et al [6]. Tal proposta considera, além da velocidade e pressão do fluido, a velocidade da estrutura.

4 Resultados numéricos

Dois resultados são apresentados: (1) escoamento de Couette circular onde a velocidade da estrutura rígida é conhecida e portanto não são resolvidas as equações do corpo rígido (interação parcial); (2) pêndulo imerso em um fluido onde a velocidade do corpo rígido não é conhecida e portanto as equações do corpo rígido devem ser resolvidas (interação total).

4.1 Escoamento de Couette circular

É um caso especial do escoamento de Taylor-Couette: escoamento de um fluido na região anular de dois cilindros concêntricos, onde ou ambos rotam ao longo do eixo comum (Figura 2-(a))

No escoamento de Couette circular o movimento do fluido é circular, estacionário e azimutal. Este tipo de movimento acontece quando o número de Taylor $T_a < 100$. Para o caso em que o cilindro externo está parado e, o interno em movimento, o número de Taylor é dado por: $T_a = \frac{\rho(w_1 R_1) gap}{\mu}$, onde: gap é a distância de separação entre os cilindros; w_1 e R_1 são a velocidade angular e o raio do cilindro

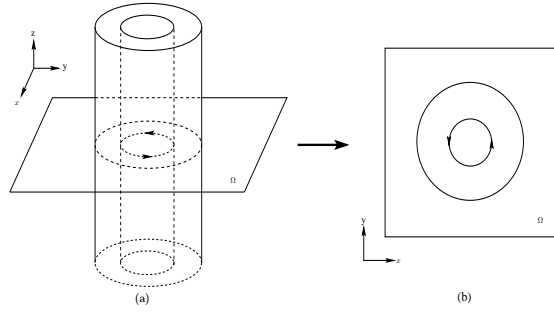


Figura 2: Plano transversal “ Ω ” ao escoamento de Couette circular (a); domínio bidimensional, Ω , considerado na modelagem do MFV (b).

interno. A solução exata é conhecida e é dada por $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z) = (0, v(r), 0)$ (coordenadas cilíndricas):

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad (19)$$

onde A, B constantes determinadas pela condição de contorno nas paredes. Neste caso, os valores são: $A = \frac{-w_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, B = \frac{(w_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$. Em coordenadas cartesianas a solução é dada por: $\mathbf{u} = v(r)(-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

Na Figura 2-(b), apresenta-se uma região retangular $\Omega = [0, L]^2$ considerada na modelagem para o MFV. Duas malhas lagrangianas são usadas para representar as circunferências desta figura. O espaçamento entre pontos lagrangianos consecutivos da malha lagrangiana é $\Delta s \approx \Delta x/2$. Adotou-se que o regime estacionário é atingido se: $\|\frac{\partial(u,v)}{\partial t}\|_{\max} < \frac{\epsilon}{N_x N_y}$ ([2]) com $\epsilon = 0.001$.

As condições da simulação são:

- $L = 0.1875, \rho = 1.0, \mu = 0.01$
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = (0, 0), \mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0$
- $R_1 = 0.15625, R_2 = 0.65625, R_2/R_1 = 4, 2$
- $w_1 = 2$ (sentido anti-horário), $w_2 = 0.0$
- $gap = 0.5, T_a = 15, 625$

Simulações foram feitas para três diferentes tamanhos da malha euleriana. A seguir apresenta-se a descrição das malhas noindent onde $NCgap$ é a quantidade de células eulerianas de separação entre os cilindros.

$N_x = N_y$	$(Npl)_1$	$(Npl)_2$	dx	$NCgap$
60	64	264	0.031250	16
120	128	528	0.015625	32
240	256	1056	0.007812	64

Para as três malhas é computada a norma do máximo na região anular do erro entre a solução exata e a solução aproximada dada pelo MFV. O quociente entre erros consecutivos é calculado. Na Tabela 1 é mostrada tais valores. Observa-se que o erro diminui conforme refina-se o tamanho das

$N_x = N_y$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_a\ _{\max}$	quociente
60	4.27602e-02	
120	2.29318e-02	1.864668
240	1.10977e-02	2.06

Tabela 1: Erros entre a solução exata e aproximada para o escoamento de Couette mediante o MFV

malhas, e o quociente aproxima-se ao valor 2, isto indica que o método tem o comportamento de um método de primeira ordem, embora o método de solução é um método de segunda ordem.

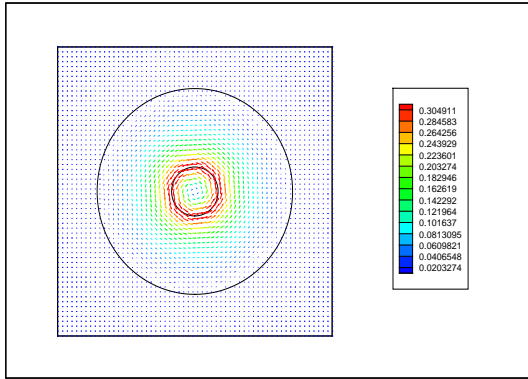


Figura 3: Escoamento de Couette circular: Campo de velocidade (Malha 60×60)

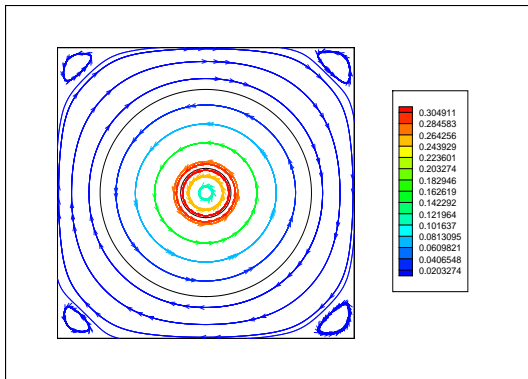


Figura 4: Escoamento de Couette circular: Linhas de corrente (Malha 60×60)

As Figuras 3 e 4 mostram o campo de velocidade e as linhas de corrente do escoamento de Couette circular em uma malha cartesiana 60×60 , onde as legendas correspondem à norma da velocidade.

4.2 Pêndulo imerso em um fluido

Este problema consiste em um pêndulo imerso em um fluido, contidos em uma caixa fechada. Inicialmente o sistema fluido-pêndulo encontra-se em repouso com o pêndulo posicionado de modo a formar um ângulo $\theta > 0$ com o eixo $-y$ (Figura 5).

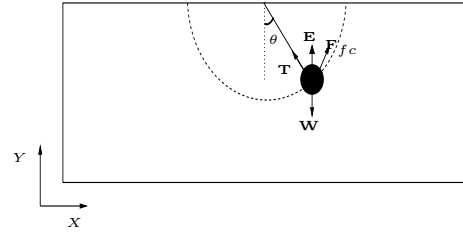


Figura 5: Pêndulo confinado numa caixa contendo um fluido incompressível: forças atuantes no pêndulo.

Solução analítica para este problema não é conhecida, embora o comportamento físico da dinâmica do pêndulo seja conhecido.

Solução mediante o MFV é obtido em 2D; para tal fim o pêndulo é considerado como um cilindro projetado no plano. Além das equações do fluido são resolvidas as equações do corpo rígido para o pêndulo.

Os seguintes conjuntos de dados foram usados [4]:

- $\Omega = [0 : 6][0 : 2]$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = (0, 0)$, $\mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0$
- $N_x = 768$, $N_y = 256$, $\Delta x = \Delta y = 7.81250e - 03$
- $\rho = 1.0$, $\mu = 5.0e - 3$
- $R = 0.125$, $L_p = 1$,
- $\mathbf{g} = (0.0, -980.66532)$, $\rho_c = 3.0$
- $N_{pl} = 204$, $\theta_0 = 84^\circ$
- Tempo de simulação igual a 4s.

As figuras 6 e 7 mostram a história temporal do comportamento das variáveis: θ e w . Qualitativamente os resultados são coerentes com a física do problema, isto é, o amortecimento do pendulo é capturado pelo MFV.

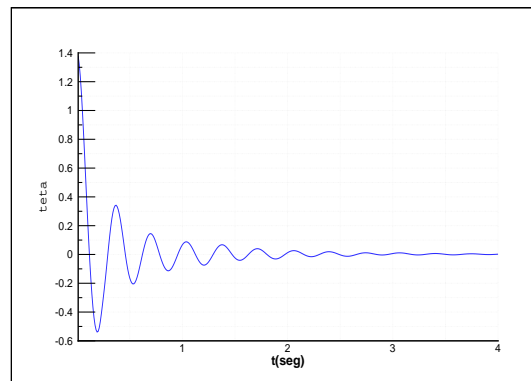


Figura 6: Pêndulo imerso num fluido incompressível: história temporal do ângulo

5 Conclusão

Neste trabalho, dois problemas de interação fluido-estrutura rígida foram resolvidas através do MFV.

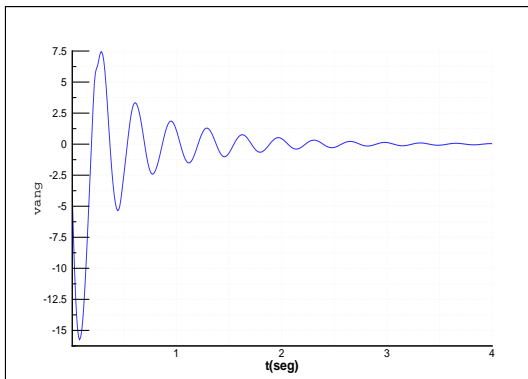


Figura 7: Pêndulo imerso num fluido incompressível: história temporal da velocidade angular

No primeiro, o escoamento de Couette circular, a solução obtida foi comparada com a solução analítica. Os resultados são coerentes e verificam convergência de primeira ordem, um comportamento similar ao método da fronteira imersa de Peskin [11]. No segundo problema, do pêndulo imerso em um fluido, não são conhecidas soluções experimentais ou analíticas e portanto, a sua comparação não é possível. Porém, resultados obtidos da história temporal do ângulo e da velocidade angular do pêndulo são coerentes com a dinâmica esperada para esta: amortecimento.

Referências

- [1] J. M. Arruda, Modelagem Matemática de Escoamentos Internos Forçados Utilizando o Método da Fronteira Imersa e o Modelo Físico Virtual, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, 2004.
- [2] Armando de Oliveira. Fortuna, Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos : conceitos básicos e aplicações, Edusp, São Paulo, 2000.
- [3] D. Goldstein, and R. Handler and L. Sirovich, Modeling a no-slip flow boundary with an external force field, *Journal of Computational Physics*, 105 (1993) 354.
- [4] L. H. Juárez, R. Glowinski, Numerical Simulation of The Motion of Pendula in an Incompressible Viscous Fluid by Lagrange Multiplier/Fictitious Domain Methods, “Fourteenth International Conference on Domain Decomposition Methods”.
- [5] J. Kim and D. Kim and H. Choi, An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries, *Journal of Computational Physics*, 171 (2001) 132-150.
- [6] L. F. Lima E Silva and A. Silveira-Neto and J. J. R. Damasceno, Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, *Journal of Computational Physics*, 189 (2002) 351-370.
- [7] Sekhar Majumdar, Gianluca Iaccarino, Paul Durbin, RANS solvers with adaptive structured boundary non-conforming grids, “Center for Turbulence Research Annual Research Briefs 2001”, (2001) 353-366.
- [8] Rajat Mittal, Gianluca Iaccarino, Immersed Boundary Methods, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37 (2005) 239-261.
- [9] J. Mohd-Yusof, Combined Immersed-Boundary/B-Spline Methods for Simulations of Flow in Complex Geometries, *Annual Research Briefs (Center for Turbulence Research, NASA Ames and Stanford University)*, (1997) 317-327.
- [10] J.E.S. Oliveira, and A.F.L. Lima e Silva, and G. Guimarães, and A. Silveira-Neto, Simulação Numérica do Escoamento a Baixo Reynolds Sobre um Cilindro de Diâmetro Variável usando MFI / MFV, “Proceedings of the 10^o Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering” , (2004).
- [11] Charles S. Peskin, Flow patterns around heart valves: A numerical method, *Journal of Computational Physics*, 10 (1972) 252-271.
- [12] A. R. Silva, and G. B. Carvalho, and A.F. L. Lima e Silva, Mansur e Silveira-Neto, Modelagem matemática e simulação numérica de escoamentos sobre corpos móveis utilizando-se o método da fronteira imersa, *In Submitted to Proceedings of the 10^o Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, 2004.
- [13] P. Swarztrauber and R. Sweet, Efficient FORTRAN subprograms for the solution of elliptic partial differential equations. “ Technical Report TN/IA-109” , NCAR, 1995.
- [14] T. Ye, R. Mittal, H.S. Udaykumar and W. Shyy, An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries, *Journal of Computational Physics* , 156 (1999) 209-240.