Solução Global e Decaimento Exponencial para uma EDP Não-Linear da Mecânica Quântica.

Sebastião M.S. Cordeiro[*], Jorge Ferreira[†]
CCEN - PPGME - UFPA
66075-110, Campus-Guamá, 01 - Belém, PA
E-mail: smscordeiro@bol.com.br,
jf@ufpa.br

João dos Santos Protázio, Carlos A. Raposo da Cunha
ESMAC/UFPA - Campus do Guama, Belém
Rua Augusto Corrêa s/nº
66075-110, Belém, Pa
Depto de Matemática, UFSJ-São João Del Rei
E-mail: protazio@ufpa.br, raposo@ufsj.edu.br

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a existência de solução Global fraca bem como o decaimento exponencial para uma equação de Klein-Gordon do tipo Kirchhoff-Carrier,a qual denotaremos por (P):

$$(P)\begin{cases} u'' - M(\int_\Omega |\nabla u|^2 ds)\Delta u + M_1(\int_\Omega |u|^2 dx)u \\ -\Delta u' = 0 \\ u = 0, \text{ em } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Onde Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega\times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$. E ainda, $-\Delta$ é o operador auto-adjunto não limitado definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde $a(u,v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$.
Este tipo de equação aparece na mecânica quântica.

2 Notações e Hipóteses

No que se segue, denotaremos por: $((,)), \|.\|, (,), |.|$ produto interno e norma em $H_0^1(\Omega)$ *e* $L^2(\Omega)$, respectivamente.
Sendo que estamos considerando o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da "norma do gradiente", isto é, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$.
Assumiremos as seguintes hipóteses sobre M e M_1:

$H.1)$ $M, M_1 \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$
$H.2)$ $M(s) \geq m_0 > 0, \forall s \in [0,\infty)$
$H.3)$ $M_1(s) \geq 0, \forall s \in [0,\infty)$

[*]Aluno do PPGME/UFPA
[†]Orientador de dissertação de mestrado

3 Resultado principal

TEOREMA 1
Suponhamos que as funções M e M_1 obedecem as condições estabelecidas em (2), se $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ e $f \equiv 0$. Então existe uma função vetorial $u : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$, tal que:

1) $u \in L^2([0,\infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$;

2) $u' \in L^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$;

3) $u'' \in L^2([0,\infty); L^2(\Omega))$;

4) $\frac{d}{dt}(u'(t),v) + M(\|u(t)\|^2)((u(t),v)) + M_1(|u(t)|)(u(t),v) - (\Delta u'(t),v) = 0$

$\forall \ v \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,\infty)$;

5) $u(0) = u_0$ e $u'(0) = u_1$.

Demonstração:
A existência da solução será demonstrada pelo Método de Faedo-Galerkim.

1ª Etapa: Soluções Aproximadas.

Sejam (ω_ν), $\nu = 1,2,...$, um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ constituido de vetores proprios do operador $-\Delta$ e $\{\lambda_\nu\}$ a correspondente sequência de valores proprios. Para cada m = 1,2,... seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$. O Problema aproximado associado a (P) consiste em encontrar uma solução sob a forma:

$u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\omega_\nu \in V_m$, onde os $g_{\nu m}$ são de classe C^2, determinados de modo que satisfaça o seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} (u'_m(t), v) - M(||u_m(t)||^2)(\Delta u_m(t), v) + \\ M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), v) - \\ (\Delta u'_m(t), v) = 0 \\ u_m(0) = u_{0m} \overset{forte}{\rightarrow} u_0 \ em H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega) \ , \\ u'_m(0) = u_{1m} \overset{forte}{\rightarrow} u_1 \ em H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

onde u_{0m} e u_{1m} são as aproximações de u_0 e u_1 respectivamente.

2ª Etapa: Estimativas Apriori.

Para as estimativas I, II e III, consideramos na equação (1) $v = u'_m(t)$,$v = -\Delta u_m(t)$ e $v = u''_m(t)$, respectivamente, e obtemos as seguintes limitações:

$$\begin{aligned} &(u_m) \text{ é } \ limitada \\ &\ em \ \ L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)); \\ &(u'_m) \text{ é } \ limitada \\ &\ em \ Ł^\infty(0, \infty; L^2(\Omega) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)); \\ &(u''_m) \text{ é } \ limitada \\ &em \ \ L^2(0, \infty; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

3ª Etapa: Passagem ao Limite.

Tendo como base as limitações das estimativas apriori (2ª Etapa) e usando o teorema de Banach-Alouglu-Borbaki, podemos obter uma subsequência de (u_m),que continuaremos denotando por (u_m), tal que:

$$u_m \rightharpoonup u \ \ em \ L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad fraco \quad estrela \tag{2}$$

$$u_m \rightharpoonup u \ \ em \ L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad fraco; \tag{3}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \ \ em \ L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad fraco \ \ estrela; \tag{4}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \ \ em \ L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad fraco; \tag{5}$$

$$u''_m \rightharpoonup u'' \ \ em \ L^2(0, \infty; L^2(\Omega)), \quad fraco. \tag{6}$$

Convergências dos Termos lineares.

Usando o fato de que $L^\infty(0, \infty; X) \hookrightarrow L^2(0, \infty; X)$ segue que de (3):

$$(\Delta u_m, \omega) \rightharpoonup (\Delta u, \omega) \quad fraco, \ \forall \ \ \omega \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)). \tag{7}$$

Da convergência (5) deduzimos que:

$$(\Delta u'_m, \omega) \rightharpoonup (\Delta u', \omega) \quad fraco, \ \forall \ \ \omega \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)). \tag{8}$$

Convergencias nos termos não-lineares

Usando o *Lema de Compacidade de Aubin-Lions*, com $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$,$B = H_0^1(\Omega)$ e $B_1 = L^2(\Omega)$ das convergencias obtidas anteriormente, podemos extrair uma subsequência de (u_m), que continuaremos denotando por (u_m), tal que:

$$u_m \rightarrow u \ \ forte, \ \ em \ \ L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)). \tag{9}$$

e portanto

$$\|u_m\| \rightarrow \|u\| \ \ forte, \ \ em \ \ L^2(0, \infty).$$

e passando a uma subsequência de (u_m), podemos supor que: $\|u_m(t)\|^2 \rightarrow \|u(t)\|^2$, q.s em $[0, \infty[$, e sendo M contínua, obtemos

$$M(\|u_m(t)\|^2) \rightarrow M(\|u(t)\|^2) \ \ q.s. \ \ em \ \ [0, \infty]. \tag{10}$$

Usando (7) e (10), concluímos a convergência de um termo não linear, isto é,

$$M(\|u_m\|^2)((u_m(t), v)) \rightharpoonup M(\|u(t)\|^2)((u(t), v)) \quad em \ \ L^2(0, \infty; L^2(\Omega)). \tag{11}$$

Para a convergência do outro termo não linear, basta notar que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Assim,

$$M(|u_m|^2)(u_m(t), v) \rightharpoonup M(|u(t)|^2)(u(t), v) \quad em \ \ L^2(0, \infty; L^2(\Omega)). \tag{12}$$

Para a passagem ao lmite, tomamos $w = \theta v$ com $\theta(t) \in L^2(0, \infty)$ e $v(x) \in V_m$ e integrando a equação aproximada (1) de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u''_m(t), v)\theta(t)dt \\ &- \int_0^T M(\|u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t), v)\theta(t)dt + \\ &\int_0^T M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t), v)\theta(t)dt - \\ &- \int_0^T (\Delta u'_m(t), v)\theta(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Tomando o limite em (13), com $m \to \infty$ e usando as convergencias nos termos lineares e não lineares, obtemos:

$$\underbrace{\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt}_{I}$$

$$- \int_0^T M(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t), v)\theta(t)dt +$$

$$\int_0^T M_1(|u(t)|^2)(u(t), v)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta u'(t), v)\theta(t)dt = 0,$$

$$\forall \theta \in L^2(0,T) \quad e \quad v \in V_m.$$

Fazendo a integração por partes em I, usando o fato que (V_m) é denso em $H_0^1(\Omega)$, e escrevendo na forma de distribuição, obtemos:

$$\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta(t)\rangle - \langle M(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t), v), \theta(t)\rangle +$$
$$\langle M_1(|u(t)|^2)(u(t), v), \theta(t)\rangle -$$
$$\langle (\Delta u'(t), \theta(t))\rangle = 0$$
$$em \quad \mathcal{D}'(0, \infty),$$

ou seja,

$$\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta(t) - M(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t), v), \theta(t) +$$
$$M_1(|u(t)|^2)(u(t), v), \theta(t) - (\Delta u'(t), \theta(t))\rangle = 0$$
$$em \quad \mathcal{D}'(0, \infty)\forall, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

4a. Etapa: Condições iniciais

Notemos inicialmente que faz sentido calcular $u(0)$ e $u'(0)$, pois sendo $u \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $u' \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ e usando resultados de regularidades, conclui-se que:

$$u \in C^0([0, \infty); H_0^1(\Omega)).$$

Consideremos $\theta \in C([0,T]) \quad com \ \theta(0) = 1$,
$\theta(t) = 0 \quad e \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad como$

$u'_m \to u' \quad em \quad L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ segue que:

$((u'_m(t), \omega)) \to ((u'(t), \omega))$
$\forall \ \omega \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Tome $w(t) = \theta(t)v$ com $\theta(t) \in L^2(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que:

$$\int_0^T \underbrace{((u'_m(t), v))\theta(t)dt}_{I} \to \int_0^T \underbrace{\frac{d}{dt}((u'(t), v))\theta(t)dt}_{II}. \quad (14)$$

Usando a integração por partes em ambas as integrais, resulta

$$-((u_m(0), v)) - \int_0^T ((u_m(t), v))\theta'(t)dt \to -((u(0), v))$$
$$- \int_0^T ((u(t), v))\theta'(t)dt. \quad (15)$$

Mas sabemos de (4) que,

$$u_m \rightharpoonup u fraco \ \ estrela \ \ em \ \ L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Logo temos que:

$$\int_0^T ((u_m(t), v))\varphi(t)dt \to \int_0^T ((u(t), v))\varphi(t)dt$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \forall \varphi \in L^1(0,T).$$

Daí segue que:

$$((u_m(0), v)) \to ((u(0), v)) \quad (16)$$

mas,

$$u_m = u_{om} \to u \quad em \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$$

então,

$$((u_m(0), v)) \to ((u(0), v)) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (17)$$

de (17) e (18), obtemos:

$$((u_m(0), v)) = ((u(0), v)) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,
$u(0) = u_0$. Para provarmos que $u'(0) = u_1$, usaremos a covergência (3) e (7) e procedendo de forma similar, conclui-se que:
$((u'(0), v)) = ((u, v))$ para todo $v \in L^2(\Omega)$ e
Portanto
$u'(0) = u_1$.
cqd.

4 Estabilidade Exponencial

TEOREMA 2
Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega), \ \ u_1 \in H_0^1(\Omega)$, e $f = 0$. Seja $E(t) = \frac{1}{2}[|u'|^2 + \widehat{M}(\|u\|)^2 + \widehat{M_1}(|u|)^2]$ é a energia associada ao problema (P) se u é solução global de (P),então

$$E(t) \leq \alpha_1 e^{\alpha_2 t},$$

$t \geq 0$, e α_1, α_2 são constantes positivas.
Demonstração:
Para provarmos o teorema-2, usaremos o lema de Nakao, a saber:
LEMA
Seja φ uma função limitada ($\varphi \geq 0$) em R^+, satisfazendo:

$$max \varphi(s) \leq c_0[\varphi(t) - \varphi(t+1)]$$

para todo $t \geq 0$, onde c_0 é uma constante positiva. Então

$$\varphi(t) \leq ce^{-\alpha t}, \quad para \quad todo \quad t \geq 0.$$

onde α e c são constantes positivas.
Demonstração:
Ver [8].
Considere a equação aproximada (1), fazendo $v = u'(t)$, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[|u'(t)|^2 + \widehat{M}(|\nabla u(t)|^2) + \widehat{M_1}(|u(t)|^2)] +$$
$$|\nabla u'(t)|^2 = 0 \quad (18)$$

logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) = -|\nabla u'(t)|^2$$

ou seja, $E(t)$ é decrescente.
Agora, integrando (19) de 0 até t, temos,

$$E(t) + \int_0^t |\nabla u'(s)|^2 ds = E(0) \tag{19}$$

logo,

$$|u'(t)|^2 + m_0(|\nabla u(t)|^2) + m_1(|u(t)|^2) \leq c \tag{20}$$

integrando (19) de t_1 até t_2, onde $0 < t_1 < t_2$, obtemos:

$$E(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} |\nabla u'(s)|^2 ds = E(t_1), \tag{21}$$

$\forall t > 0$, temos:

$$E(t+1) + \int_{t_1}^{t+2} |\nabla u'(s)|^2 ds = E(t),$$

ou melhor:

$$\int_t^{t+1} |u'(s)|^2 ds = E(t) - E(t+1) \equiv F(t)^2. \tag{22}$$

Portanto podemos escolher dois pontos $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$, e usando o teorema do Valor Mádio para Integrais, em (23) obtemos:

$$|u'(t_i)| \leq 2F(t), \quad i = 1, 2. \tag{23}$$

Agora fazendo $v = u(t)$ na equação aproximada (3) temos:

$$\frac{d}{dt}(u'(t), u(t)) - |u'(t)|^2 + M(|\nabla u(t)|^2|\nabla u(t)|^2 + M_1(|u(t)|^2)|u(t)|^2 + (u'(t), u(t)) = 0.$$

Agora, integrando de t_1 até t_2,usando a desegualdade de Cauchy-Schwarz,desigualdades elementares e a hipótese sobre M e M_1, obtemos:

$$Sup \quad ess_{t \leq s \leq t+1} E(s) \leq c_4 F(t)^2 = c_4[E(t) - E(t+1)]$$

com

$$c_4 = \frac{c_3}{1 - \frac{1}{\delta_1 m_1}} = \frac{c_3}{\frac{\delta_1 m_1 - 1}{\delta_1 m_1}} = \frac{c_3 \delta_1 m_1}{\delta_1 m_1 - 1} > 0$$

E pelo lema de Nakao segue o resultado.

Observação:
Estamos em fase final de um trabalho abstrato em que o problema (P) será um caso particular.

Referências Bibliográficas

1. BRÉZIS, H., *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.
2. CASTRO, N. *Sobre um Problema Não-Linear de Evolução: Existência, comportamento assintótico e soluções periódicas.* Tese de Doutorado. rio de Janeiro, 1995.
3. CARRIER, G.F. *On the vibration problem of elastic string.* Q.J. Appl. Math 3,pp 151-165, 1945.
4. LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des prolémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.
5. MATOS, M.P. *Mathematical Analysis of the Nonlinear Model for the Virations of a string. Nonlinear Analyis. Theory, Methods & Applications.* Vol. 17, no. 12, pp 1125-1137, 1991.
6. MATOS, M.P., PEREIRA, D.C. *On a Hiperbolic Equations with Strong Damping.* Funkcialay Ekavacioj. Vol. 34, no. 2, pp 303-311, 1991.
7. MEDEIROS L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos Esaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Texto de Métodos Matemáticos. no. 25, IM-UFRJ, 1993.
8. NAKAO, M., NARAZAKI, T.,Existence end Decay of Solutions of Some Nonlinear Wave equatins in Noncilindrical Domain. Math. Rep., XI-2, pp 117-125,
9. PATCHEU,S.K.,*On a Global Solution and Asymptotic Behavior for the Generalized Damped Extensible Beam Equations.* JDE, V 135, pp 299-314, 1997.