

# SIMULAÇÃO NA REDE DE TEORIAS DE CAMPOS QUÂNTICOS

**S. Mittmann dos Santos,**

**B. E. J. Bodmann**

Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas – UFPel

Campus Universitário, 96010-900, Pelotas, RS

E-mail: mittmann@pop.com.br, bardo@ufpel.edu.br

## Resumo

No presente trabalho, é apresentada uma abordagem para determinar propriedades da teoria de campos quânticos com interação quártica considerando simetrias contínuas. A abordagem convencional é otimizada no sentido de manter a complexidade do algoritmo independente da dimensão do espaço em consideração e comparada a uma abordagem nova, que utiliza na simulação o espaço contínuo. Um dos problemas que surgem na implementação de uma teoria de campos na rede é o fato de que discretizar os campos implica em quebra explícita de certas simetrias contínuas. A presente abordagem tem como objetivo apresentar um método desenvolvido pelos autores que permite a preservação de simetrias quando for implementada a teoria na rede. O método difere dos usuais, no sentido de que os campos são definidos no espaço contínuo finito sob forma parametrizada e os parâmetros são discretizados numa rede, que representa o espaço paramétrico. Os procedimentos até então utilizados realizam uma transposição do campo contínuo para o discreto. A determinação dos parâmetros introduzidos é realizada através do algoritmo *SPI* (*Selfconsistent Parametric Inference*) [2]. A configuração dos parâmetros é obtida através de Simulação Monte Carlo. As simulações conduzidas mostram que uma rede relativamente pequena já fornece uma aproximação razoável para a função de correlação.

## 1 Introdução

O ramo da física que abrange a teoria de campos quânticos pode ser considerado como bem consolidado. A utilização dessas teorias para determinar propriedades da natureza nas demais escalas, da subnuclear até os estados sólidos, demonstrou seu sucesso. Porém, é uma convicção atual de que precisa-se desenvolver *frameworks* cada vez mais eficientes para tornar a predição de propriedades não triviais, a partir dessas teorias, viável ou tratável. Discussões apresentadas na literatura têm o caráter de focar apenas as teorias com as suas propriedades triviais [4]. Um exemplo padrão é a

exploração da *teoria de campos escalares com interação quártica*, que é o interesse principal do presente trabalho. Esta teoria aparentemente não tem diretamente uma equivalência na natureza, porém, como teoria efetiva, ela fornece a chave para explorar mecanismos novos que podem se tornar constituintes e/ou detalhes em teorias de caráter gerais, como, por exemplo, a busca de uma teoria quântica de gravitação ou a questão de interesse atual da condensação de Bose-Einstein. Certamente leis de conservação e os seus associados grupos de transformações constituem um papel fundamental. Porém, é um fato que, após a discretização de uma teoria, as demais simetrias contínuas presentes na teoria original são quebradas explicitamente.

Um passo importante na exploração das teorias tipo  $\phi^4$  é que deve-se procurar a forma que tenha o “correto limite” contínuo com as respectivas simetrias. Na referência [4], foi levantada a falta dessa consideração. Os autores deste trabalho associam este problema ao fato de que não existem ferramentas, procedimentos e métodos suficientemente versáteis para analisar possibilidades de reconciliar abordagens discretas e as suas contrapartidas quânticas contínuas. Como uma contribuição nesta direção, entende-se o presente trabalho, que utiliza o ponto de partida convencional, a integral funcional regularizada na rede, com o objetivo de explorar métodos e procedimentos para implementar uma abordagem eficiente, porém adequada à questão física original.

## 2 Campos com interação quártica

Considera-se a teoria de campos escalares com interação quártica com dimensão  $d$  utilizando a geometria Euclidiana. A ação do sistema no espaço contínuo é

$$S = \int \{ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 + g \phi^4 \} d^d x . \quad (1)$$

Com a finalidade de simular uma teoria de campos no espaço-tempo infinito, supõe-se condições de contornos periódicos.

Quando se trata da questão de calcular valores esperados, precisa-se da função de equipartição. Esta pode ser escrita sob a forma  $Z = \int e^{-S} [\mathcal{D}\phi]$ . De acordo com o teorema de Wick, a chave para as correlações é o conhecimento da função de correlação em dois pontos, ou seja, a função de Green  $\langle \phi(x)\phi(x+x_0) \rangle$ . É possível expressar todas as funções de correlação através de termos contendo apenas funções de correlação da ordem 2 e, respectivamente, 4. As modificações da característica gaussiana são um efeito das funções de correlação de ordens maiores que 4. Como sugerido na referência [4], uma maneira de calcular a constante de acoplamento renormalizada é

$$g_R = \frac{\langle (\sum_n \phi_n)^4 \rangle - 3 \langle (\sum_n \phi_n)^2 \rangle^2}{\langle (\sum_n \phi_n)^2 \rangle^2}. \quad (2)$$

Este procedimento de renormalização é conhecido como *função de Green irreduzível de partícula única em quatro pontos* [1, 3, 4, 8].

### 3 Otimização dimensional e resultados convencionais

Usualmente a implementação de uma teoria de campos é feita de forma discreta, ou seja, a integral de ação é simplesmente discretizada. Na abordagem presente, será introduzida uma redefinição dos campos que permite uma descrição sem dependência explícita do espaçamento  $a$  da rede, ou seja,  $a$  não aparece explicitamente nas equações. A teoria de campos escalares pode ser implementada na rede ao substituir todas as derivadas por diferenças finitas, e, no caso presente, tornando a ação independente do espaçamento  $a$  da rede, redefinindo os campos e, respectivamente, os parâmetros:

$$\tilde{\phi}_I = a^{\frac{d}{2}-1} \phi(Ia), \quad \tilde{m} = am, \quad \tilde{g} = a^{4-d} g, \quad (3)$$

onde  $I$  é um multi-índice especificado a seguir. Note que apenas no caso da dimensionalidade  $d = 4$  a constante de acoplamento  $g$  é independente do espaçamento da rede, e, portanto, separa os cenários  $d < 4$ , onde a interação quártica pode ser considerada como correção à teoria livre para  $a$  suficientemente pequeno, dos cenários  $d > 4$ , onde a interação quártica se torna a contribuição principal. Um outro caso interessante ocorre com  $d = 2$ . Neste, os campos não têm dimensão na abordagem onde a ação é adimensional. Utilizando as grandezas redefinidas, a ação definida nos vértices da rede, com dimensão  $d$ , é

$$S_a = \frac{1}{2} \sum_I \left\{ - \sum_J \tilde{\phi}_I \tilde{\phi}_{I+J} + (2d + \tilde{m}^2) \tilde{\phi}_I^2 + \tilde{g} \tilde{\phi}_I^4 \right\}. \quad (4)$$

A equação (4) caracteriza uma *implementação quase direta ou quase convencional*, através de uma discretização, exceto a já mencionada redefinição. Note que  $I$  é um multi-índice com tantos componentes quanto a dimensão do espaço em consideração, e  $J$  fornece as diferenças em todas as direções e orientações possíveis.

A equação (4) será a equação principal, a *master equation*, para a implementação Monte Carlo e portanto o índice  $a$  na ação será desprezado, pois esta não depende explicitamente do espaçamento da rede  $a$ , e os campos  $\tilde{\phi}$  serão representados simplesmente por  $\phi$ . Adicionalmente, será reduzido o espaço com volume infinito na equação (1) a um com volume  $V = (Na)^d = L^d$ , onde  $N$  está relacionado com o tamanho da rede através de  $Na = L$ , para tornar a implementação da teoria de campos (eq. (4)) viável.

No primeiro passo, será determinada a solução da teoria de campos na rede para o caso livre, isto é, a solução assintótica no limite  $\tilde{g} \rightarrow 0$ , ou seja, no limite  $g \rightarrow 0$  ou  $a \rightarrow 0$  com  $d < 4$ . Desde que a teoria de campos livres pode ser escrita sob forma quadrática em termos dos campos, isto permite reescrever a ação sob forma matricial bilinear, onde os termos fora da diagonal surgem das diferenças finitas,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \sum_{I,J} \phi_I K_{IJ} \phi_J, \\ \text{com } K_{IJ} = (2d + m^2) \delta_{IJ} - \sum_L \delta_{I J+L}. \quad (5)$$

Esta soma tem um número infinito de componentes. Adotando condições de contorno periódicas, é permitido reduzir a soma a uma expressão finita. Com a finalidade de simular uma teoria de campos no espaço-tempo infinito, supõe-se condições de contorno periódicas, já adotadas na equação (5) através da soma  $\sum_L$ , onde o vetor  $\vec{L}$  tem a função de deslocar o sítio da rede para dentro da célula com coordenadas entre 0 e  $L$ . Somar  $\lambda$  vezes a função  $\phi$  com os valores presentes na célula  $L^d$  e normalizá-la no volume  $(\lambda L)^d$  é equivalente, levando em conta uma célula única. A figura 1 ilustra uma topologia do espaço alterada para  $d = 2$ , onde, se  $a \ll L$ , espera-se que esta alteração não tenha influência significativa nos resultados da simulação.

Quando se trata da questão de calcular valores esperados, precisa-se da função de equipartição. Esta pode ser escrita sob a forma

$$Z = \int \exp \left\{ - \frac{1}{2L^{2d}} \sum_k \phi_k K_{k-k} \phi_{-k} \right\} [\mathcal{D}\phi_k] \\ = \int \exp \left\{ - \frac{1}{2L^{2d}} \sum_k K_{k-k} |\phi_k|^2 \right\} [\mathcal{D}\phi_k]. \quad (6)$$

Note que a integral pode ser reescrita simplesmente como um produto de integrais gaussianas, com a

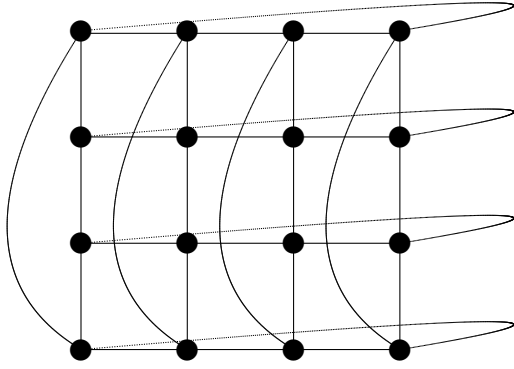


Figura 1: Topologia de uma rede  $4 \times 4$  com condições de contorno periódicas para  $d = 2$ .

solução analítica da integral

$$\begin{aligned} Z &= (2\pi N)^{\frac{N}{2}} \left( \prod_k \sqrt{K_{k-k}} \right)^{-1} \\ &= (2\pi N)^{\frac{N}{2}} \left( \sqrt{\|K\|} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\|K\|$  denota o determinante da matriz  $K$  [4]. Em cálculos de valores esperados,  $Z$  tipicamente aparece no numerador da respectiva expressão. A chave para as correlações é o conhecimento da função de correlação em dois pontos, ou seja, a função de Green  $\langle \phi_I \phi_J \rangle$ . A transformada de Fourier da função de Green, o propagador, é

$$\begin{aligned} \langle \phi_I \phi_J \rangle &= \frac{1}{L^{2d}} \sum_{KK'} \langle \phi_K \phi_{K'} \rangle e^{i\frac{2\pi}{N}KI} e^{i\frac{2\pi}{N}K'J} \\ &= \sum_{KK'} K_{KK'}^{-1} e^{i\frac{2\pi}{N}KI} e^{i\frac{2\pi}{N}K'J} \delta_{K-K'}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde o uso dos índices  $I$  e  $J$  será explicado adiante. Para determinar a correlação no limite  $K \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\langle \phi_0^2 \rangle = \left\langle \left( \sum_n \phi_n \right)^2 \right\rangle = \frac{L^d Z^2}{m_R}, \quad (9)$$

onde o fator  $Z$  pode ser calculado e interpretado como o quadrado do fator de escala para o campo. Utilizando a redefinição para o campo da equação (3),  $\tilde{\phi}_n = a^{\frac{d}{2}-1} \phi_n$ , e o resultado obtido (9), determina-se  $Z = a^{d-2}$ , e, portanto, desta forma, obtivemos uma ferramenta para calcular a expressão  $\frac{Z^2}{m_R}$  através da simulação  $\langle \sum_n \phi_n^2 \rangle$ . A partir dessa expressão e utilizando o teorema de Wick, calculam-se as demais funções de correlação para qualquer ordem.

## 4 Um método Monte Carlo

A integral de caminho fornece a conexão entre os operadores quânticos e as variáveis clássicas através

da liberdade de escolher um espaço de representação que permita tratá-las como grandezas clássicas [4, 5]. Isto significa que pode-se abordar o método Monte Carlo como se o sistema fosse um sistema da mecânica estatística, ou seja, cada configuração de campos é multiplicada por um fator de peso  $e^{-S(\phi)}$ .

Considera-se que o sistema seja caracterizado pela equação (4). Para simular a teoria de campos será adotado o método Monte Carlo Metropolis, onde os sítios da rede são escolhidos aleatoriamente [6]. O campo no sítio escolhido é modificado através de uma alteração aleatória que, de acordo com um dado critério, pode ser aceita ou rejeitada. Uma forma conveniente de organizar a soma é reorganizar os índices introduzindo um mapeamento do tipo  $\mathbb{N}^d \rightarrow \mathbb{N}$ . Esta forma permite a implementação computacional utilizando um único *loop*, independente da dimensão, ou seja, sem alterar a complexidade do algoritmo. O método desenvolvido para tratar os índices será apresentado na seção 4.1, onde os detalhes do algoritmo são descritos. A alteração no campo pode ser determinada utilizando um gerador de números aleatórios homogêneo num dado intervalo ou não homogêneo, como, por exemplo, uma distribuição gaussiana com uma largura pré-determinada. Em seguida, a alteração da ação com a nova configuração de campos é calculada. O valor para o campo é aceito como valor atualizado para o campo de acordo com a probabilidade de aceitação

$$P_A = e^{-(S_{\text{posterior}} - S_{\text{anterior}})}. \quad (10)$$

Este procedimento deve ser repetido para cada alteração de um dado sítio, isto é, a alteração é introduzida para um sítio com um dos índices  $n_1, \dots, n_{Nd}$ , ficando inalterado o restante dos sítios. A nova configuração será aceita quando  $P_A \geq 1$ .

### 4.1 Ordenação e linearização das coordenadas

Quando um campo escalar é implementado na rede, são necessários a especificação da posição e o valor numérico do campo  $\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi(Ia) \rightarrow \phi_I$ . Para manter um algoritmo independente da dimensão, pode-se utilizar uma transformação que projeta as coordenadas do hipervolume com dimensão  $d$  a uma linha. Este procedimento garante que a varredura sobre todas as coordenadas pode ser feita com um *loop* só ao invés de *loops* dentro de *loops* com “profundidade”  $d$ . Os seguintes passos devem ser realizados:

1. Discretização das posições:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{I}a, \quad (11)$$

onde  $a$  é o espaçamento da rede e  $I$  é um vetor contendo números inteiros. Supondo que cada dimensão contemple  $N$  vértices, então

$i_k \in \{1, \dots, N\}$ . Desta forma, uma posição é especificada puramente por  $I$ .

2. O termo na ação que contempla as derivadas pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi(\vec{x}) \partial^\mu \phi(\vec{x}) &= \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu \phi(\vec{x}) \partial^\mu \phi(\vec{x}) \\ &= \sum_{|J|=1} (\phi(I+J) - \phi(I))^2. \end{aligned} \quad (12)$$

3. “Linearização” das coordenadas contidas no hipervolume de tamanho  $N^d$ , dados os componentes  $i_k$ , com  $k \in \{1, \dots, d\}$  do vetor  $I$ . É realizado o seguinte mapeamento:

$$\begin{aligned} M(I \rightarrow \nu) : \quad \nu &= i_1 + \sum_{k=2}^d (i_k - 1) N^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^d (i_k - 1) N^{k-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

4. A recuperação dos componentes  $n_i$  a partir de  $\nu$  é obtida através do valor inteiro do número entre as chaves indicado a seguir de forma decrescente.

$$\begin{aligned} i_d &= \text{int} \left\{ \frac{\nu}{N^{d-1}} + (1 - \delta_{d1}) \right\} \\ i_{d-1} &= \\ \text{int} \left\{ \frac{\nu - (i_d - 1) N^{d-1}}{N^{d-2}} + (1 - \delta_{d-1,1}) \right\} \\ &\vdots \\ i_2 &= \\ \text{int} \left\{ \frac{\nu - \sum_{k=3}^d (i_k - 1) N^{k-1}}{N} + (1 - \delta_{21}) \right\} \\ i_1 &= \text{int} \left\{ \nu - \sum_{k=2}^d (i_k - 1) N^{k-1} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

5. As equações a seguir definem o algoritmo:

$$\begin{aligned} \phi \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \pm 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} &= \phi \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} \\ \pm \phi_{x_k} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} &+ \frac{1}{2} \phi_{x_k x_k} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} a^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Somando as duas equações de (15), uma com

sinal positivo e outra com sinal negativo, temos

$$\begin{aligned} \phi \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k + 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} &= 2\phi \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} \\ -\phi \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k - 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} &+ \phi_{x_k x_k} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} a^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\nu}_k) &= 2\phi(\nu) \\ -\phi(\underline{\nu}_k) &+ \phi_{x_k x_k}(\nu) a^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sum_k \phi(\bar{\nu}_k) &= 2d\phi(\nu) \\ -\sum_k \phi(\underline{\nu}_k) &+ (m\phi(\nu) + 2g\phi^3(\nu)) a^2, \end{aligned} \quad (18)$$

com

$$\begin{aligned} \nu &= M \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}, \quad \bar{\nu}_k = M \begin{pmatrix} i_1 \\ i_{k+1} \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}, \\ \underline{\nu}_k &= M \begin{pmatrix} i_1 \\ i_{k-1} \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

6. Para estabelecer as condições de contorno periódicas, é necessário que

$$\begin{aligned} \underline{\nu} = M \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k - 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix} &\rightarrow M \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ N \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}, \\ &\text{para } i_k = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

7. O loop sobre  $\bar{\nu}_k = 1$  é percorrido até  $b = b_1 b_2 \dots b_{Nd} = 11 \dots 1$ .

8. Se  $b_{\bar{\nu}_k} = 1$ , não faz nada e incrementa  $\bar{\nu}_k$ ; se não, calcula os conjuntos  $\{\underline{\nu}_k\}$ ,  $\{\bar{\nu}_k\}$  e  $\nu$  utilizando a inversão para  $\nu$ :

$$M^{-1}(\nu) = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}. \quad (21)$$

- (a) Inverte  $\bar{\nu}_k$   $\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k + 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}$  e acha o primeiro

decremento  $\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}$  para o qual  $b_\nu = 0$ .  
Isto define  $k$  e altera  $b_\nu = 1$ .

- (b) Calcula a partir de  $\nu$  os conjuntos  $\{\underline{\nu}_k\}$  e  $\{\bar{\nu}_k\}$ , respeitando as condições de contorno indicadas em (20),

$$\left\{ \begin{pmatrix} i_1 \pm 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \pm 1 \\ \vdots \\ i_d \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{d-1} \\ i_d \pm 1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (22)$$

- (c) Calcula  $\phi(\bar{\nu}_k)$  redefinido, sem a presença de  $a$  como em (18):

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\nu}_k) &= (2d + m)\phi(\nu) + 2g\phi^3(\nu) \\ &- \sum_j (\phi(\underline{\nu}_j) - (1 + \delta_{jk})\phi(\bar{\nu}_j)). \end{aligned} \quad (23)$$

Na fase inicial de cada passo Monte Carlo, o caso  $b_\nu = 0$  ou  $b_{\bar{\nu}_j} = 0$  precisa de um procedimento diferente. Assim, determina  $\phi(\nu)$  de forma randômica; se  $b_{\bar{\nu}_j} = 0$  e  $j \neq k$ , determina  $\phi(\bar{\nu}_j)$  para os demais  $j$ 's e calcula  $\phi(\bar{\nu}_k)$  de acordo com (23).

Este procedimento deve ser realizado tantas vezes quanto for necessário para a execução do número de passos Monte Carlo exigidos para a obtenção de uma acuidade pré-definida.

Na figura 2, são dadas as funções de correlação para três discretizações: com  $8 \times 8$  sítios, tem-se  $m = 0.2$  e  $g = 0.04$ ; com  $16 \times 16$  sítios, tem-se  $m = 0.1$  e  $g = 0.01$ ; com  $24 \times 24$  sítios, tem-se  $m = 0.05$  e  $g = 0.0025$ . No eixo horizontal, a distância média foi reescalada de acordo com a constante da rede espacial discreta. Também o eixo horizontal foi reescalado de forma a demonstrar a característica equivalente do decaimento da curva para as simulações.

## 5 Implementação do $SPI$

Considera-se  $Z = \int \exp\{-\mathcal{S}\}[\mathcal{D}\phi]$  e a ação (1). A partir de uma base truncada conhecida, pode ser parametrizado o campo conforme

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i + \mathcal{O}(\phi), \quad (24)$$

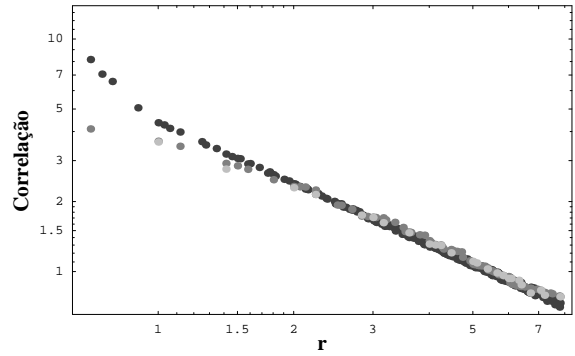


Figura 2: Funções de correlação em dois pontos obtida através de simulação convencional.

onde, principalmente, as integrais contendo termos do tipo  $\int \phi^n d^d x$  podem ser calculadas analiticamente. Como exemplo, considera-se o espaço com dimensão 2. Neste caso, considerando que qualquer base ortogonal pode ser reescrita na forma polinomial,

$$\phi \approx \left( \sum_{i=0}^n a_i^{(t)} t^i \right) \left( \sum_{j=0}^n a_j^{(x)} x^j \right); \quad (25)$$

$$\phi^2 \approx \left( \sum_{i=0}^n \tilde{a}_i^{(t)} t^i \right) \left( \sum_{j=0}^n \tilde{a}_j^{(x)} x^j \right); \quad (26)$$

$$\phi^4 \approx \left( \sum_{i=0}^n \tilde{\tilde{a}}_i^{(t)} t^i \right) \left( \sum_{j=0}^n \tilde{\tilde{a}}_j^{(x)} x^j \right), \quad (27)$$

onde  $\tilde{a}_i(t) = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j}$  e  $\tilde{\tilde{a}}_i = \sum_{j,k,l=0}^{i,j,k} a_l a_{k-l} a_{j-k} a_{i-j}$ .

A ação (1), então, é alterada para

$$\mathcal{S} = \mathcal{S} \left( \{a_i^{(t)}, a_j^{(x)}\}; t_{min}, t_{max}, x_{min}, x_{max} \right). \quad (28)$$

O volume de integração  $V_I = (t_{max} - t_{min})(x_{max} - x_{min})$  corresponde a um *cut-off* infravermelho. A função de equipartição altera para  $Z = \int \exp\{-\mathcal{S}\} [\mathcal{D}a^{(t)}][\mathcal{D}a^{(x)}]$ , onde  $[\mathcal{D}a]$  denomina a medida do espaço paramétrico que constitui a integral de Stiltjes-Wiener [7]. No procedimento que segue, a função de correlação,  $\langle \phi_0^2 \rangle$  será determinada utilizando uma abordagem de autoconsistência.

Seja  $\Xi$  uma função definida positiva, chamada de medida de autoconsistência,  $\Xi(m, g|\{a_i\}) = \exp\left\{ \int \ln \mathcal{K} \prod_i da_i \right\}$  onde  $\mathcal{K}$  é um gerador autoconsistente para medir o inverso da divergência da solução da parametrização  $\langle [\sum \phi(m, g|\{a_i\})]^2 \rangle$ . Para obter uma solução aceitável para o problema, a função  $\Xi$  deve mostrar uma autoconsistência máxima para a função parametrizada, isto é, o conjunto de parâmetros precisa ser tal que  $\Xi$  é um

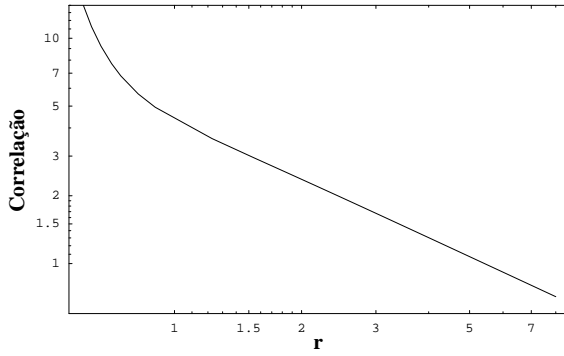


Figura 3: Simulação da função de correlação obtida através de  $\mathcal{SPI}$ .

máximo. Assume-se agora que, no intervalo de interesse,  $\Xi$  deve ser uma função bem comportada, isto é, regular. Então, a condição mencionada é verdadeira se o conjunto das equações

$$\left\{ \frac{\partial \Xi}{\partial a_i} = 0 \right\} \quad \text{ou equivalente} \quad \left\{ \frac{\partial \ln \Xi}{\partial a_i} = 0 \right\}. \quad (29)$$

O conjunto  $\{\tilde{a}_i\}$  expressa os estimadores de máxima autoconsistência e é denominado o conjunto de parâmetros de máxima autoconsistência.

## 5.1 O gerador autoconsistente

Considerando que a função autoconsistente precisa ser bem comportada,  $\mathcal{K}$  precisa ser definido positivo e, para quase todos os casos, será finito, uma construção óbvia, mas não única, é fazer uso do  $2n$ -ésimo momento  $\mathcal{M}^{2n}$ , onde  $n \geq 1$  é determinado por conveniência.

$$\mathcal{M}^{2n} = \int \left( \left\langle \left( \sum_i \phi \right)^2 \right\rangle - \frac{V_I Z^2}{2m_R} \right)^{2n} \prod_i da_i \quad (30)$$

Define-se a distribuição como uma expressão gaussiana usando o segundo momento e a variância:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} & \left( \left\langle \left[ \sum \phi(m, g\{a_i\}) \right]^2 \right\rangle \right) \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{M}^{2n}}{2n\sigma^{2n}} \right\}, \quad (31) \end{aligned}$$

que concorda com as características da medida autoconsistente desejada. A figura 3 indica a simulação realizada para a função de correlação  $g(r)$  em dois pontos utilizando o algoritmo  $\mathcal{SPI}$  em concordância com os resultados da simulação convencional.

## 6 Conclusão

Este trabalho apresenta uma nova abordagem para determinar propriedades da teoria de campos quânticos com interação quártica. O método

difere dos usuais, no sentido de que os campos são definidos no espaço contínuo sob forma parametrizada e os parâmetros são discretizados numa rede, que representa o espaço paramétrico. O algoritmo  $\mathcal{SPI}$  é utilizado para gerar o modelo analítico, permitindo determinar a função de correlação de forma pseudo-analítica. A configuração dos parâmetros é obtida através de simulação Monte Carlo, que maximiza a função de auto-consistência. Quando a dimensão do espaço é aumentada, precisa-se para as simulações convencionais um número maior de pontos onde os campos são definidos  $\propto N^D$ . Aqui  $N$  é o número de pontos ao longo de um canto da rede e  $D$  a dimensão do espaço em consideração.

No caso da parametrização e utilizando o algoritmo  $\mathcal{SPI}$  o número de parâmetros aumenta linearmente com a dimensão. As simulações conduzidas mostram que uma rede relativamente pequena já fornece uma aproximação razoável para a função de correlação. Note que a rede é unidimensional para cada parâmetro independente, e apenas precisa-se de redes dimensionalmente maiores nos casos onde os parâmetros se correlacionam. A precisão da determinação através do  $\mathcal{SPI}$  é comparável com a rede  $24 \times 24$ , porém utilizando redes com um total de pontos da ordem de  $10^2$ .

## Referências

- [1] D. Bailin e A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Bristol: Adam Hilger (1986).
- [2] Bodmann, B.E.J., Gómez, A.T., A Selfconsistent Parametric Inference Approach on Construction Heuristics, *Journal of Computational Analysis and Applications*, vol. 3 no. 3, pp. 3–14 (2001).
- [3] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, New York: McGraw-Hill (1980).
- [4] J. R. Klauder, *Beyond conventional quantization*, Cambridge: Cambridge (2000).
- [5] S. Mittmann dos Santos, *Simetria e quebra de simetria em sistemas físicos clássicos e quânticos* (Trabalho de conclusão do curso de física), São Leopoldo: UNISINOS (2000).
- [6] M. E. J. Newman e G. T. Barkema, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, Oxford: Clarendon Press (1999).
- [7] G. Roepstorff, *Path integral approach to quantum physics*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag (1994).
- [8] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, New York: Oxford University Press (1996).