

# Análise Dinâmica de Problemas Escalares Não-homogêneos Através do Método dos Elementos de Contorno

Carlos Friedrich Loeffler, Wagner Dalvi Santolin

Depto de Engenharia Mecânica, UFES,  
29075-010, Vitória, ES  
E-mail: carlosloeffler@ct.ufes.br, wagnerdalvi@gmail.com ,

## 1. Introdução

Uma das maiores limitações do método dos elementos de Contorno (MEC) encontra-se na modelagem de problemas cujo meio contínuo é não-homogêneo. Para minimizar a onerosa tarefa de fazer modelagens através do uso de sub-regiões, foi adaptada a esses casos a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade. Tal formulação é capaz de tratar a heterogeneidade de modo especial e conduzir o equacionamento integral do modelo matemático e sua conseqüente discretização exclusivamente em termos de valores de contorno, sem necessidade de sub-regiões. Uma das mais promissoras aplicações dos modelos não homogêneos na atualidade é a análise sísmica para prospecção de petróleo. Nestes casos se faz necessário modelar também o fenômeno da propagação de ondas. Assim, esse trabalho tem o objetivo de analisar a desempenho da formulação citada em problemas não homogêneos, nos quais admitem-se processos dinâmicos. A técnica da Dupla Reciprocidade tradicional também é aqui empregada, com a finalidade de modelar a ação dinâmica.

## 2. Equação de Governo

Considere um meio contínuo não-homogêneo, estacionário, no qual  $d\Omega$  representa uma superfície infinitesimal em que as variáveis bidimensionais expressas por  $X=X(x_1, x_2)$  descrevem sua posição com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. A equação de governo neste caso, considerando o equilíbrio e a compatibilidade de uma função escalar  $u$ , que genericamente pode representar deslocamento, temperatura ou qualquer propriedade física similar, é dada em notação indicial por [1,2]:

$$[K(X)u(X)]_{,i} = \frac{1}{c^2} \ddot{u} \quad (1)$$

Na última equação,  $K(X)$  é uma função que representa a propriedade constitutiva do meio

contínuo, dependente da posição ao longo do domínio bidimensional. As condições de contorno essenciais e naturais são definidas a seguir. Para  $X \in \Gamma_u$  (condição essencial):

$$u(X) = \bar{u} \quad (2)$$

Para  $X \in \Gamma_q$  (condição natural):

$$u(X)_{,i} n(X)_i = \bar{q} \quad (3)$$

Nas equações (2) e (3),  $\Gamma_u(X)$  e  $\Gamma_q(X)$  representam as fronteiras do meio contínuo e  $n(X)_i$  expressa o vetor normal unitário em um ponto qualquer destas. Nos problemas de Mecânica dos Sólidos,  $q$  adquire o significado de tensão normal aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode interpretado como um fluxo imposto de energia difusiva.

O ponto de partida para a abordagem pelo MEC consiste do estabelecimento da equação de governo (1) numa forma integral, usando a solução fundamental  $u^*(\xi; X)$  como função auxiliar, resultando na seguinte expressão, onde foram omitidos os argumentos por simplicidade:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \quad (4)$$

A aplicação do esquema de integração por partes no lado esquerdo da equação anterior permite reescrevê-la como:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (Ku_{,i} u^*)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (5)$$

A aplicação do Teorema da Divergência transforma a primeira integral de domínio numa integral de contorno, na forma:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Ku_{,i} n_i u^* d\Gamma + \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (6)$$

Usando a definição expressa na equação (3), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (7)$$

Aplicando mais uma vez o esquema de integração por partes junto à integral de domínio existente, tem-se:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma + \int_{\Omega} (Kuu^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u(Ku^*_{,i})_{,i} d\Omega \quad (8)$$

Empregando o Teorema da Divergência uma vez mais, agora na primeira integral de domínio da equação anterior, chega-se a:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma + \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u(Ku^*_{,i})_{,i} d\Omega \quad (9)$$

Desenvolvendo a derivada do núcleo da última integral de domínio, a equação (9) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma + \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} uKu^*_{,ii} d\Omega \quad (10)$$

Considera-se uma solução fundamental tradicional, associada a um problema governado pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto fonte  $\xi$  de um domínio espacial infinito, ou seja:

$$u^*_{,ii}(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (11)$$

Cuja solução é dada por:

$$u^*(\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (12)$$

Também é estratégico se definir:

$$q^*(\xi) = u^*_{,i}(\xi; X) n_i \quad (13)$$

Nas equações precedentes,  $r$  é a distância entre o ponto fonte  $\xi$  e um ponto genérico  $X$  do domínio, chamado ponto campo.

Substituindo a equação (11) na última parcela do lado esquerdo da equação (10), e utilizando a definição (13), tem-se:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma + \int_{\Gamma} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega - c(\xi)u(\xi)K(\xi) \quad (14)$$

A constante  $c(\xi)$  refere-se às possibilidades do ponto fonte situar-se no interior ou fora do domínio  $\Omega$ , assim como no próprio contorno  $\Gamma$ , o que resulta em valores distintos, conforme pode ser obtido na literatura especializada [3].

A única integral de domínio restante será transformada numa integral de contorno através do procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade.

### 3. Aplicação da Quase-Dupla Reciprocidade

O procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade é uma estratégia similar àquela criada por Nardini e Brebbia [4]. A Quase-Dupla reciprocidade aproxima o núcleo da integral de domínio da equação (14) através do seguinte sentença:

$$b_i = uK_{,i} \cong \alpha_p^j \psi_{p,i}^j = \alpha_p^j \eta_{pi}^j \quad (15)$$

A forma diádica das funções auxiliares  $\psi$  e  $\eta$  utilizadas deve-se a aspectos operacionais, cujos detalhes podem ser colhidos na referência [5]. Substituindo-se a equação (15) na integral de domínio da equação (14), tem-se:

$$\int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega \cong \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega \quad (16)$$

Uma vez mais, usando integração por partes:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} (\psi_{p,i}^j u^*_{,i})_{,i} d\Omega - \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u^*_{,ii} d\Omega \quad (17)$$

Aplicando o Teorema da Divergência e usando a mesma solução fundamental é possível reescrever a equação anterior na forma:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_{p,i}^j u^*_{,i} n_i d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) \quad (18)$$

A expressão completa referente ao lado esquerdo da equação (4) fica:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuq^* d\Gamma + \\ -c(\xi)u(\xi)K(\xi) + \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_p^j q^* d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) \quad (19)$$

Para operacionalizar o emprego do Método dos Elementos de Contorno na parcela dinâmica existente do lado direito da equação (4), usa-se a técnica da Dupla Reciprocidade tradicional [5]. Aproxima-se, então, o núcleo da integral de domínio através da seguinte sentença:

$$\ddot{u} = \ddot{\beta}^J F^J = \ddot{\beta}^J \phi^J_{,ii} \quad (20)$$

Na equação anterior F é um conjunto de funções auxiliares e  $\mathcal{O}$  representa as primitivas de F. Assim sendo, pode-se escrever:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \frac{\ddot{\beta}^J}{c^2} \int_{\Omega} \phi^J_{,ii} u^* d\Omega \quad (21)$$

A aplicação, também, do esquema de integração por partes no lado direito da equação (21) permite reescrevê-la como:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \\ = \frac{\ddot{\beta}^J}{c^2} \left[ \int_{\Omega} (\phi^J_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \phi^J_{,i} u^*_{,i} d\Omega \right] \quad (22)$$

A aplicação do Teorema da Divergência transforma a primeira integral de domínio numa integral de contorno, na forma:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \\ = \frac{\ddot{\beta}^J}{c^2} \left[ \int_{\Gamma} \phi^J_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \phi^J_{,i} u^*_{,i} d\Omega \right] \quad (23)$$

Aplicando, novamente, a integração por partes na equação (23) e fazendo  $z^J = \phi^J_{,i} n_i$ , tem-se:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \\ = \frac{\ddot{\beta}^J}{c^2} \left[ \int_{\Gamma} z^J u^* d\Gamma - \int_{\Omega} (\phi^J u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \phi^J u^*_{,ii} d\Omega \right] \quad (24)$$

Empregando o Teorema da Divergência uma vez mais, na primeira integral de domínio da equação anterior, chega-se a:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \\ = \frac{\ddot{\beta}^J}{c^2} \left[ \int_{\Gamma} z^J u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi^J u^*_{,i} n_{,i} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi^J u^*_{,ii} d\Omega \right] \quad (25)$$

Substituindo a equação (11) na última parcela do lado direito da equação (25) e utilizando a definição (13), tem-se:

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \\ = \frac{\ddot{\beta}^J}{c^2} \left[ \int_{\Gamma} (z^J u^* - \phi^J q^* d\Gamma) - c(\xi) \phi^J(\xi) \right] \quad (26)$$

#### 4. Discretização

A próxima etapa é a discretização espacial e temporal com a aproximação das variáveis físicas, através de procedimentos típicos e bem conhecidos do MEC, que resultam no seguinte sistema matricial:

$$GKq - HKu + [H\Psi]\alpha = [Gz - H\phi]\ddot{\beta} \quad (27)$$

É possível eliminar os vetores  $\alpha$  e  $\ddot{\beta}$  na equação anterior através das seguintes substituições:

$$\alpha = [\eta]^{-1} K_d u \quad (28)$$

$$\ddot{\beta} = F^{-1} \ddot{u} \quad (29)$$

Sendo  $K_d$  uma matriz composta pelos valores das derivadas da matriz diagonal de rigidez  $K$ . Desta forma, pode-se escrever:

$$[Gq - Hu]K + H\Psi\eta^{-1}K_d u = [Gz - H\phi]F^{-1}\ddot{u} \quad (30)$$

E, ainda, pode-se fazer:

$$B = H\Psi\eta^{-1}K_d \quad (31)$$

$$M = [Gz - H\phi]F^{-1} \quad (32)$$

$$G_1 = GK \quad e \quad H_1 = HK \quad (32a)$$

Obtendo, desta forma, com a substituição de (31), (32) e (32a) em (30) a equação:

$$[H_1 - B]u - G_1 q = -M\ddot{u} \quad (33)$$

## 5. Avanço no Tempo

Para realizar o avanço no tempo lança-se mão do Esquema Houbolt [6], sendo este incondicionalmente estável, tanto para o Método de Elementos Finitos como para o Método de Elementos de Contorno. A aproximação do esquema para a aceleração num instante  $n+1$  é dada por:

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} [2u_{n+1} - 5u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}] \quad (34)$$

Substituindo a equação (34) na equação (33), fazendo  $MA = [H_1 - B]$  e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se finalmente a:

$$\begin{aligned} & [2M + \Delta t^2 MA]u_{n+1} - \Delta t^2 G_1 q_{n+1} = \\ & = 5M u_n - 4M u_{n-1} + M u_{n-2} \end{aligned}$$

A equação anterior é resolvida passo a passo, de acordo com procedimento incremental usualmente utilizado nos problemas de dinâmica estrutural.

## 6. Conclusões:

A formulação com Quase-Dupla Reciprocidade trata da não-homogeneidade física como se fosse uma ação de domínio e a influência da sua variação é computada em cada elemento de contorno. Nesta formulação encontra-se um grande potencial para resolver problemas dinâmicos em meios não-homogêneos associados à propagação de ondas.

Tendo em vista a sua simplicidade, baixo custo computacional e possibilidade de acoplamento imediato com outras técnicas do Método dos Elementos de Contorno, o interesse em desenvolver pesquisas com esta formulação é bastante justificável.

Trabalhos anteriores considerando casos homogêneos dinâmicos e não-homogêneos estáticos já foram simulados, mostrando bons resultados, sugerindo que o modelo proposto deve produzir resultados numéricos de boa precisão.

Os primeiros testes com a formulação apresentada já estão sendo desenvolvidos, abordando problemas unidimensionais.

De qualquer modo, o modelo proposto mostrou-se compatível ao acoplar adequadamente duas formulações distintas do método dos elementos de contorno – a Dupla Reciprocidade e a Quase-dupla Reciprocidade – para a solução de um problema de indiscutível importância prática.

## 7. Referências bibliográficas

- [1] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. “Desempenho de Algumas Estratégias de Simplificação de Equações Diferenciais Empregando o Método dos Elementos de Contorno como Ferramenta de Solução”. In: IX Congresso Regional dos Estudantes de Engenharia Mecânica, 2002, Itajubá. 2002.
- [2] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. “Eficácia da Transformação de Variáveis na Simplificação de Problemas de Campo Escalar Simulado pelo Método dos Elementos de Contorno”. In: XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2002, Nova Friburgo. 2002.
- [3] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., , 1984, “Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering”, Springer-Verlag, New York.
- [4] NARDINI, D., BREBBIA, C.A., 1982, “A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements”, Proceeding of the Fourth

International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering, Southampton.

- [5] PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. and WROBEL, L.C., 1992 “The Dual Reciprocity, Boundary Element Method”, Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- [6] BATHE, K. J.. **Finite element procedures in engineering analysis**. USA: Prentice-Hall, 1982.