

Sobre controle de vibração em membranas

Waldemar D. Bastos, Adalberto Spezamiglio

Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP, 15054-000, São José do Rio Preto, SP

Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado, convexo, contendo a origem do plano, com fronteira ∂B de classe C^∞ . Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, limitado, simplesmente conexo, cuja fronteira ∂U é C^∞ por partes e sem cúspides, com vetor normal exterior denotado por ν . Assumimos $\bar{B} \subset U$, onde \bar{B} denota o fecho de B . Seja $\Omega = U - \bar{B}$. Para cada $\delta > 0$, denotamos U_δ uma vizinhança aberta de U com raio δ e definimos $\Omega_\delta = U_\delta - \bar{B}$. Os espaços H^1 , H^1_{loc} , e $H^0 = L^2$ são os espaços de Sobolev usuais. O resultado principal desta nota é o seguinte:

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto satisfazendo as condições acima. Então existe $T > 0$ tal que, para toda $u_o \in H^1(\Omega)$ com $u_o = 0$ em ∂B , e $u_1 \in L^2(\Omega)$, existe uma função $g \in L^2(\partial U \times [0, T])$ de modo que a solução $u \in H^1(\Omega \times [0, T])$ do problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ u(0) &= u_o & \text{em } \Omega \\ u_t(0) &= u_1 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & \text{em } \partial B \times [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g & \text{em } \partial U \times [0, T] \end{aligned}$$

satisfaz a condição final

$$u(T) = u_t(T) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad \square$$

O sistema acima descreve as vibrações de uma membrana que na posição de equilíbrio é representada pelo domínio Ω . O deslocamento é dado pela função u , o estado inicial é dado pelo par (u_o, u_1) , e uma força controladora g age somente na parte ∂U de sua fronteira. A parte ∂B da fronteira fica livre. O problema colocado consiste em determinar um instante T e um controle g , que atuando em ∂U , fará cessar a vibração no instante T .

A demonstração do teorema acima, pelo método "Controlabilidade via Estabilização" introduzido por D. L. Russell em [1] se baseia em dois pontos cruciais:

(1) Decaimento local de energia da solução do problema de valor inicial e fronteira

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 & \text{em } (\mathbb{R}^2 - \bar{B}) \times \mathbb{R} \\ w(0) &= w_o & \text{em } \mathbb{R}^2 - \bar{B} \\ w_t(0) &= w_1 & \text{em } \mathbb{R}^2 - \bar{B} \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 & \text{em } \partial B \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde $w_o \in H^1(\mathbb{R}^2 - \bar{B})$, $w_o = 0$ em ∂B , $w_1 \in L^2(\mathbb{R}^2 - \bar{B})$ são funções que se anulam no complementar de Ω_δ .

(2) Existência do traço $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ em $L^2(\partial U \times [0, T])$.

O decaimento de energia é dado pela estimativa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} (|w(t)|^2 + |w_t(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2) dx &\leq \\ &\leq \frac{C}{(1+t)^2} (\|w_o\|_{H^1}^2 + \|w_1\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

onde C é uma constante dependendo apenas de Ω_δ e da geometria de B . Veja [2], lemma 2.1.

A existência do traço $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ é uma consequência de um teorema devido a D. Tataru. Veja [3], theorem 2.

Referências

- [1] D. L. Russell, A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appl. Math.*, v.52 (1973) 189-211.
- [2] P. Secchi and Y. Shibata, On the decay of solutions to the 2D Neumann exterior problem for the wave equation. *J. Differential Equations*, 194 (2003) 221-236.
- [3] D. Tataru, On the regularity of boundary traces for the wave equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CL. Sci.* (4), v.26 (1998) 185-206.