

# Controle Robusto Nebuloso de Sistemas Não-Lineares com Zona-Morta

Wallace Moreira Bessa,

Departamento de Educação Superior, CEFET/RJ,  
Avenida Maracanã, 229, 20271-110, Rio de Janeiro, RJ

E-mail: wmbessa@cefet-rj.br,

**Max Suell Dutra,**      **Luciano S. C. Raptopoulos,**

Programa de Engenharia Mecânica, COPPE, UFRJ,  
Centro de Tecnologia, 21945-970, Cidade Universitária, RJ

E-mail: max@mecanica.coppe.ufrj.br,    luciano@mecanica.coppe.ufrj.br.

## Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma estratégia de controle para sistemas dinâmicos que apresentem não-linearidades do tipo zona-morta em sua entrada. A abordagem proposta consiste no desenvolvimento de um controlador por modos deslizantes, ao qual incorporou-se um algoritmo adaptativo baseado na lógica nebulosa, com o intuito de compensar a perda de desempenho normalmente causada pela zona-morta. Tanto a estabilidade do sistema quanto suas propriedades de convergência são rigorosamente demonstradas com base na teoria da estabilidade de Liapunov e com o auxílio do lema de Barbalat.

## Introdução

A não-linearidade de zona-morta é um fenômeno comumente encontrado em diversos sistemas de controle, especialmente naqueles que envolvem atuadores do tipo servo-válvulas hidráulicas ou servomotores DC. Sua presença normalmente causa degradação da performance do controlador, podendo inclusive levar ao aparecimento de ciclos-limites no sistema em malha-fechada. Diversas estratégias vêm sendo ultimamente empregadas com o objetivo de minimizar a perda de desempenho causada por este tipo de limitação dos atuadores.

Na maioria dos artigos encontrados na literatura a abordagem adotada consiste na obtenção de uma função inversa da zona-morta. Infelizmente, poucos trabalhos apresentam análises criteriosas de convergência e de estabilidade do sistema de controle resultante, optando-se frequentemente por soluções *ad-hoc*, baseadas em resultados oriundos de simulações numéricas. Utilizando a metodologia de controle adaptativo por modelo de referência, Tao e Kokotović apresentaram em [6] um algoritmo que determina automaticamente a função inversa para sistemas lineares. Em [2],

Kim *et al.* propuseram um controlador nebuloso do tipo proporcional-derivativo com compensação, também nebulosa, da zona-morta. A lógica nebulosa foi empregada também por Lewis *et al.* [3] para a compensação da zona-morta em um controlador proporcional-derivativo. Uma estratégia semelhante foi adotada por Šelmić e Lewis [8], porém o compensador nebuloso foi substituído por duas redes neurais, uma para identificação e outra para a compensação propriamente dita. Baseando-se na teoria de controle por modos deslizantes, Sheng e Sun apresentaram em [4] um controlador robusto, mas que necessita de um conhecimento prévio dos parâmetros da zona-morta. Utilizando duas redes neurais, uma para identificação e outra para compensação, Tsai e Chuang propuseram em [7] um sistema de controle para sistemas lineares precedidos por uma zona-morta. Explorando a representação adotada em [3], Wang *et al.* propuseram em [9] um algoritmo adaptativo para o controle de sistemas não-lineares com zona-morta desconhecida.

No entanto, em grande parte das aplicações encontradas no setor industrial os parâmetros da zona-morta não são conhecidos e/ou variam no tempo, o que dificulta a construção de uma função inversa da zona-morta. Também é comum nestas situações os sistemas dinâmicos envolvidos, além de não-lineares, apresentarem também incertezas, tanto paramétricas quanto na dinâmica, o que motiva a adoção de uma estratégia de controle robusto. Tendo em vista as características do problema em questão, propõem-se neste trabalho um novo algoritmo a estrutura variável para sistemas não-autônomos, incertos e com zona-morta desconhecida. Conforme será detalhado a seguir, a abordagem adotada consiste em um controlador por modos deslizantes, ao qual incorporou-se uma estratégia de compensação adaptativa baseada na lógica nebulosa para minimizar a perda de desempenho causada pela zona-morta.

## Formulação do problema

Considere o sistema dinâmico não-linear e não-autônomo apresentado a seguir:

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)w(t) \quad (1)$$

onde  $x^{(n)}$  é a  $n$ -ésima derivada da variável  $x$  e  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  é o vetor com as variáveis de estado. As funções  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são não-lineares e variantes no tempo, e a variável  $w(t)$  representa a saída de uma função do tipo zona-morta, conforme ilustrado na Figura 1.

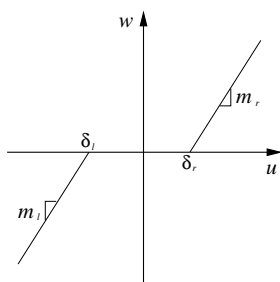


Figura 1: Não-linearidade do tipo zona-morta.

A zona-morta apresentada na Figura 1 pode ser matematicamente descrita por:

$$w(t) = \begin{cases} m_l(u(t) - \delta_l) & \text{se } u(t) \leq \delta_l \\ 0 & \text{se } \delta_l < u(t) < \delta_r \\ m_r(u(t) - \delta_r) & \text{se } u(t) \geq \delta_r \end{cases} \quad (2)$$

onde  $u(t)$  é a entrada da zona-morta e representa também a variável manipulada do controlador.

Conforme discutido em [6] e [9], as hipóteses a seguir são fisicamente justificáveis, e serão adotadas para o modelo de zona-morta adotado neste trabalho:

**Hipótese 1** A saída da zona-morta não está disponível para ser medida.

**Hipótese 2** Os coeficientes angulares em ambos os lados da zona-morta são iguais, i.e.,  $m_l = m_r = m$ .

**Hipótese 3** Os parâmetros da zona-morta  $\delta_l$ ,  $\delta_r$  e  $m$ , embora desconhecidos e variantes no tempo, são limitados e com sinais conhecidos:  $\delta_l < 0$ ,  $\delta_r > 0$  e  $m > 0$ .

A Hipótese 1 é uma limitação frequentemente observada em sistemas reais. Caso a saída  $w(t)$  pudesse ser medida, a tarefa de construção da função inversa seria incrivelmente facilitada. As hipóteses 2 e 3 são simplificações fisicamente aceitáveis, tendo em vista que estão de acordo com a maioria dos atuadores encontradas em aplicações industriais.

Deste modo, podemos reescrever a equação (2) na forma:

$$w(t) = mu(t) - md(u(t)) \quad (3)$$

onde  $d(u(t))$  pode ser obtida se compararmos as equações (2) e (3):

$$d(u(t)) = \begin{cases} \delta_l & \text{se } u(t) \leq \delta_l \\ u(t) & \text{se } \delta_l < u(t) < \delta_r \\ \delta_r & \text{se } u(t) \geq \delta_r \end{cases} \quad (4)$$

**Observação 1** Considerando as hipóteses 2 e 3 e a equação (4), pode-se verificar que  $d(u(t))$  é limitada:

$$|d(u(t))| \leq \delta$$

onde  $\delta = \max\{-\delta_{l \max}, \delta_{r \min}\}$ .

Com relação ao sistema dinâmico apresentado na equação (1), podemos ainda estabelecer as seguintes hipóteses:

**Hipótese 4** O vetor de estados  $\mathbf{x}$  está disponível para ser medido.

**Hipótese 5** A função  $f$  é desconhecida, porém limitada por uma função conhecida de  $\mathbf{x}$  e  $t$ , ou seja,

$$|\hat{f}(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t)| \leq F(\mathbf{x}, t)$$

onde  $\hat{f}(\mathbf{x}, t)$  é o valor estimado de  $f(\mathbf{x}, t)$ .

**Hipótese 6** O ganho  $g$  é desconhecido, porém limitado e positivo, ou seja,  $0 < g_{\min} \leq g(\mathbf{x}, t) \leq g_{\max}$ .

A tarefa de controlar o sistema dinâmico incerto e com zona-morta desconhecida, discutido nesta seção, poderia ser resolvida através da metodologia clássica de controle por modos deslizantes. No entanto, esta abordagem demandaria um esforço desnecessário por parte do controlador, e levaria também a um *chattering* excessivo. Uma alternativa para contornar esta situação indesejável seria a utilização de um algoritmo adaptativo para compensar os efeitos da zona-morta. Deste modo, apresenta-se na próxima seção um controlador por modos deslizantes, ao qual foi incorporado um algoritmo adaptativo baseado na lógica nebulosa.

## Sistema de controle

Seja então  $\tilde{x} = x - x_d$  o erro de rastreamento associado a trajetória pré-estabelecida  $x_d$ , e

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}]^T$$

o vetor contendo os erros de rastreamento associados a cada uma das variáveis de estado.

Considere uma superfície  $S(t)$ , dita de deslizamento, definida no espaço de estado  $\mathbb{R}^n$  pela equação escalar  $s(\mathbf{x}, t) = 0$ , onde

$$s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Lambda}^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (5)$$

onde  $\mathbf{\Lambda} = [\lambda^{n-1}, c_{n-1}\lambda^{n-2}, \dots, c_2\lambda, c_1]^T$  e  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) são coeficientes que fazem do polinômio  $\lambda^{n-1} + c_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + c_2\lambda + c_1$  um polinômio de Hurwitz.

Assim, temos para  $\dot{s}$

$$\dot{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Lambda}^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{x}^{(n)} + \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (6)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}_u = [0, \lambda^{n-1}, c_{n-1}\lambda^{n-2}, \dots, c_2\lambda]^T$ .

A teoria do controle por modos deslizantes surgiu após o trabalho pioneiro, em 1960, do matemático A. F. Filippov [1], sendo posteriormente desenvolvida na literatura soviética. A idéia principal consiste em transformar um problema de rastreamento de trajetória de ordem  $n$  em  $\mathbf{x}$ , em um problema de estabilização de primeira ordem em  $s$ . Assim, a lei de controle  $u$  é projetada de modo a garantir que  $\tilde{\mathbf{x}}$  alcance a superfície  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  em um dado intervalo de tempo finito, e que, após alcançada, permaneça “deslizando” sobre ela. A inclusão de uma camada limite ao redor da superfície de deslizamento, proposta por Slotine [5], possibilitou ainda a eliminação do *chattering*, o que tornou a técnica muito mais eficiente.

Deste modo, supondo  $f(\mathbf{x}, t)$  e  $g(\mathbf{x}, t)$  perfeitamente conhecidas, e a não existência da não-linearidade de zona-morta, a lei de controle

$$u = g^{-1} \left( -f + x_d^{(n)} - \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) \quad (7)$$

seria suficiente para permitir que a dinâmica desejada,  $\dot{s}(\mathbf{x}, t) = 0$ , se estabelecesse.

Porém, dada a existência de uma não-linearidade do tipo zona-morta na entrada da planta, e o fato de que possuímos apenas uma estimativa dos seus parâmetros, bem como de  $f(\mathbf{x}, t)$  e  $g(\mathbf{x}, t)$ , a lei de controle deveria ser substituída por:

$$u = \widehat{g}m^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) - K \operatorname{sgn}(s) \quad (8)$$

onde  $\hat{f}$  e  $\widehat{g}m$  são, respectivamente, estimativas de  $f$  e do produto  $gm$ .

O termo  $-K \operatorname{sgn}(s)$  foi adicionado à lei de controle para conferir a robustez necessária frente às incertezas, estruturadas e não-estruturadas, do sistema dinâmico apresentado na equação (1). Ressalta-se que o ganho  $K$  possui valor positivo e a função relé  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  é definida por:

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} -1 & \text{se } z < 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \\ 1 & \text{se } z > 0 \end{cases}$$

Definindo-se o ganho  $K$  adequadamente, a equação (8) garante que a condição de deslizamento

seja atendida. Porém, conforme mencionado anteriormente, esta lei de controle demandaria uma atividade muito grande do controlador, levando inclusive ao aparecimento de oscilações de alta frequência da variável manipulada (*chattering*).

Para minimizar o *gasto* de energia por parte do sistema de controle e os efeitos deste chaveamento excessivo, neste trabalho propõem-se a adição de um algoritmo adaptativo à estrutura do controlador para estimar o valor de  $d(u)$ , a fim de que a zona-morta seja previamente compensada, e a adoção de uma camada limite nas vizinhanças da superfície de deslizamento.

Considere, a princípio, apenas a incorporação da estimativa de  $d(u)$ . Deste modo, a lei de controle resultante pode ser estabelecida conforme a equação que se segue:

$$u = \hat{u} + \hat{d}(\hat{u}) - K \operatorname{sgn}(s) \quad (9)$$

onde  $\hat{u} = \widehat{g}m^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right)$  e  $\hat{d}(\hat{u})$  é uma estimativa para  $d(u)$ , definida em função de  $\hat{u}$  por um algoritmo adaptativo.

Tendo em vista que  $d(u)$  não se resume a um simples parâmetro, a utilização das metodologias adaptativas convencionais não se mostrariam adequadas neste caso. Uma alternativa mais atraente seria a adoção de um algoritmo adaptativo baseado na lógica nebulosa (*fuzzy logic*) para determinar o valor de  $\hat{d}(\hat{u})$ .

A estrutura básica de um sistema nebuloso consiste em transformar as variáveis de estado em variáveis lingüísticas, para então a partir de uma base de conhecimento, armazenada sob a forma de regras, determinar uma saída numérica.

O sistema de inferência adotado foi o TSK (Takagi-Sugeno-Kang) de ordem zero, cujas regras podem ser escritas na forma:

$$\text{Se } \hat{u} \text{ é } \hat{U}_r \text{ então } \hat{d}_r = \hat{D}_r \ ; \ r = 1, 2, \dots, N$$

onde  $\hat{U}_r$  são conjuntos nebulosos, cujas funções de pertinência podem ser escolhidas apropriadamente, e  $\hat{D}_r$  são os valores de saída relativos à cada uma das  $N$  regras.

Tendo em vista que cada regra determina um valor numérico como resposta, a saída final  $\hat{d}(\hat{u})$  do sistema inferência pode ser calculada através de uma média ponderada:

$$\hat{d}(\hat{u}) = \frac{\sum_{r=1}^N \varpi_r \cdot \hat{d}_r}{\sum_{r=1}^N \varpi_r} \quad (10)$$

ou, similarmente,

$$\hat{d}(\hat{u}) = \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{\Psi}(\hat{u}) \quad (11)$$

onde,  $\hat{\mathbf{D}} = [\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_N]^T$  é o vetor contendo os valores atribuídos a  $\hat{D}_r$  para cada regra  $r$ , e  $\mathbf{\Psi}(\hat{u}) = [\psi_1(\hat{u}), \psi_2(\hat{u}), \dots, \psi_N(\hat{u})]^T$  é o vetor de

componentes  $\psi_r(\hat{u}) = \varpi_r / \sum_{r=1}^N \varpi_r$ , sendo  $\varpi_r$  o valor de ativação da premissa de cada regra. Especialmente neste caso, como há apenas uma condição na premissa, o valor de ativação  $\varpi_r$  recebe o valor da função de pertinência associado a cada um dos conjuntos nebulosos  $\hat{U}_r$ .

Deste modo, a fim de garantir uma boa aproximação para  $d(u)$ , o vetor de parâmetros ajustáveis  $\hat{\mathbf{D}}$  será atualizado automaticamente pela lei de adaptação:

$$\dot{\hat{\mathbf{D}}} = -\gamma s \Psi(\hat{u}) \quad (12)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva relacionada a taxa de adaptação.

Ressalta-se que, além de permitir uma boa aproximação para  $d(u)$ , a lei de adaptação escolhida deve, em conjunto com o controlador proposto, assegurar a convergência dos estados à superfície de deslizamento,  $S(t)$ , e deste modo garantir o rastreamento da trajetória estipulada.

Antes de demonstrarmos a convergência do sistema em malha-fechada, devemos estabelecer a hipótese:

**Hipótese 7** *A trajetória desejada  $\mathbf{x}_d$  é contínua, disponível e limitada.*

e recordar o lema de Barbalat:

**Lema 1 (Barbalat)** *Se uma função diferenciável  $f$  possui um limite finito a medida que  $t \rightarrow \infty$ , e se  $\dot{f}$  é uniformemente contínua, então  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Vide [5].  $\square$

Uma condição suficiente para que uma função diferenciável seja uniformemente contínua, é que sua derivada seja limitada.

**Teorema 1** *Seja o sistema dinâmico não-linear, incerto, com zona-morta desconhecida, formado pelas equações (1), (3) e (4). Então a lei de controle proposta na equação (9) e a lei de adaptação, apresentada na equação (12), garantem a convergência dos estados à superfície de deslizamento e, portanto, o rastreamento da trajetória desejada.*

**Demonstração:** Considere a função positiva definida  $V$ , candidata a função de Liapunov,

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{gm}{2\gamma} \Delta^T \Delta \quad (13)$$

onde  $\Delta = \hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{D}}^*$  representa o erro entre o vetor  $\hat{\mathbf{D}}$ , de parâmetros atuais, e o vetor  $\hat{\mathbf{D}}^*$ , o qual proporciona a estimativa ótima  $\hat{d}^*(\hat{u})$ .

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s\dot{s} + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \\ &= (\tilde{x}^{(n)} + \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}})s + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \\ &= (x^{(n)} - x_d^{(n)} + \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}})s + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \\ &= \left( f + gm u - gm d(u) - x_d^{(n)} + \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) s \\ &\quad + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \\ &= \left[ f + gm \widehat{gm}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) \right. \\ &\quad \left. + gm \hat{d}(\hat{u}) - gm K \text{sgn}(s) - gm d(u) \right. \\ &\quad \left. - \left( x_d^{(n)} - \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) \right] s + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \end{aligned}$$

Chamando de  $\varepsilon$  o erro de aproximação entre  $\hat{d}^*(\hat{u})$  e  $d(u)$ , ou seja,  $\varepsilon = \hat{d}^*(\hat{u}) - d(u)$ , e verificando que  $\hat{u} = \widehat{gm}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right)$  e  $f = \hat{f} - (\hat{f} - f)$ , temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= - \left[ (\hat{f} - f) + \widehat{gm} \hat{u} - gm \hat{u} - gm \hat{d}(\hat{u}) \right. \\ &\quad \left. + gm \hat{d}^*(\hat{u}) - gm \varepsilon + gm K \text{sgn}(s) \right] s \\ &\quad + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \\ &= - \left[ (\hat{f} - f) + \widehat{gm} \hat{u} - gm \hat{u} - gm \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + gm K \text{sgn}(s) \right] s + gm s \left( \hat{d}(\hat{u}) - \hat{d}^*(\hat{u}) \right) \\ &\quad + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \\ &= - \left[ (\hat{f} - f) + \widehat{gm} \hat{u} - gm \hat{u} - gm \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + gm K \text{sgn}(s) \right] s + gm s (\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{D}}^*)^T \Psi(\hat{u}) \\ &\quad + gm\gamma^{-1} \Delta^T \dot{\Delta} \end{aligned}$$

Lembrando que  $\dot{\Delta} = \dot{\hat{\mathbf{D}}}$  e aplicando a lei de adaptação proposta, equação (12), temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= - \left[ (\hat{f} - f) + \widehat{gm} \hat{u} - gm \hat{u} - gm \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + gm K \text{sgn}(s) \right] s + gm\gamma^{-1} \Delta^T \left( \dot{\hat{\mathbf{D}}} + \gamma s \Psi(\hat{u}) \right) \\ &= - \left[ (\hat{f} - f) + \widehat{gm} \hat{u} - gm \hat{u} - gm \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + gm K \text{sgn}(s) \right] s \end{aligned}$$

Assim, considerando as hipóteses 3 e 6, pode-se assumir que  $\widehat{gm}$  seja estimado por uma média geométrica,  $\widehat{gm} = \sqrt{(gm)_{\max}(gm)_{\min}}$ , onde  $(gm)_{\max} = g_{\max} m_{\max}$  e  $(gm)_{\min} = g_{\min} m_{\min}$ . Considerando agora a Observação 1, as hipóteses 2 e 5, e o fato de que os limites de  $gm$  podem ser escritos na forma:  $\mathcal{B}^{-1} \leq \widehat{gm}/gm \leq \mathcal{B}$ , onde  $\mathcal{B} = \sqrt{(gm)_{\max}/(gm)_{\min}}$ , podemos definir o valor de  $K$  por:

$$K \geq \eta + |\varepsilon| + \widehat{gm}^{-1} \mathcal{B} F + (\mathcal{B} - 1)|\hat{u}|$$

onde  $\eta$  é uma constante positiva. Enfim, temos:

$$\dot{V}(t) \leq -\eta|s| \quad (14)$$

o que implica em  $V(t) \leq V(0)$  e, portanto, que  $s$  e  $\Delta$  são limitados. Considerando a Hipótese 7 e as equações (5) e (6), temos que  $\dot{s}$  também é limitado. Analisando a segunda derivada de  $V$  em relação a  $t$ , temos:

$$\ddot{V}(t) \leq -\eta \frac{s}{|s|} \dot{s}$$

Isto significa que  $\ddot{V}$  é limitada e, portanto, que  $\dot{V}$  é uniformemente contínua. Deste modo, pelo lema de Barbalat e por (14), temos que  $s \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ , o que assegura a convergência dos estados à superfície de deslizamento e garante o rastreamento da trajetória desejada, completando assim a demonstração.  $\square$

No entanto, a presença na lei de controle de uma descontinuidade em  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  provoca oscilações excessivas da variável manipulada (*chattering*). Deste modo, para evitar o *chattering* sugere-se a *suavização* da lei de controle, através da substituição da função descontínua do tipo relé,  $\text{sgn}(\cdot)$ , por uma função de saturação,  $\text{sat}(\cdot)$ :

$$\text{sat}(z) = \begin{cases} \text{sgn}(z) & \text{se } |z| \geq 1 \\ z & \text{se } |z| < 1 \end{cases} \quad (15)$$

Esta *suavização* da lei de controle implica na formação de uma camada limite ( $\Phi$ ) nas vizinhança da superfície de deslizamento  $S(t)$ :

$$\Phi = \left\{ \mathbf{x} \mid s(\mathbf{x}, t) \leq \phi \right\} \quad \phi > 0 \quad (16)$$

onde  $\phi$  representa a espessura da camada limite.

Assim, a lei de controle resultante pode ser estabelecida conforme a equação que se segue:

$$u = \hat{u} + \hat{d}(\hat{u}) - K \text{sat} \left( \frac{s}{\phi} \right) \quad (17)$$

onde  $\hat{u} = \widehat{g\mathbf{m}}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right)$ .

Pelo Teorema 2 podemos verificar que, definindo-se o ganho  $K$  adequadamente, a lei de controle apresentada na equação (17) garante robustez do controlador a convergência dos estados à camada limite, o que implica na estabilidade do sistema dinâmico em malha-fechada.

**Teorema 2** *Seja o sistema dinâmico não-linear, incerto, com zona-morta desconhecida, formado pelas equações (1), (3) e (4). Então, sendo o ganho  $K$  definido conforme:*

$$K \geq \eta + \delta + |\hat{d}(\hat{u})| + \widehat{g\mathbf{m}}^{-1} \mathbf{B} F + (\mathbf{B} - 1)|\hat{u}| \quad (18)$$

a lei de controle proposta na equação (17) garante a convergência dos estados à camada limite em um intervalo de tempo finito,  $0 \leq t \leq t_{\text{alc}}$ .

**Demonstração:** Seja a função positiva definida, candidata a função de Liapunov,

$$V(t) = \frac{1}{2} s_\phi^2 \quad (19)$$

onde  $s_\phi$  representa uma medida da distância do estado atual até a camada limite ( $\Phi$ ), e será definida conforme:

$$s_\phi = s - \phi \text{sat} \left( \frac{s}{\phi} \right) \quad (20)$$

Observando que  $s_\phi = 0$  dentro da camada limite e que  $\dot{s}_\phi = \dot{s}$ , temos  $\dot{V}(t) = 0$  no interior de  $\Phi$ , e do lado de fora:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s_\phi \dot{s}_\phi = \dot{s} s_\phi \\ &= \left( f + g\mathbf{m}u - g\mathbf{m}d(u) - x_d^{(n)} + \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) s_\phi \end{aligned}$$

Fora da camada limite a lei de controle assume a forma:

$$u = \widehat{g\mathbf{m}}^{-1} \left( -\hat{f} + x_d^{(n)} - \mathbf{\Lambda}_u^T \tilde{\mathbf{x}} \right) + \hat{d}(\hat{u}) - K \text{sgn}(s)$$

pois nesta situação temos  $s/\phi \geq 1$  e portanto, de acordo com a definição da função de saturação,  $\text{sat}(s/\phi) = \text{sgn}(s)$ .

Deste modo, aproveitando passagens da demonstração do Teorema 1, temos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= - \left[ (\hat{f} - f) + \widehat{g\mathbf{m}} \hat{u} - g\mathbf{m} \hat{u} - g\mathbf{m} \hat{d}(\hat{u}) \right. \\ &\quad \left. + g\mathbf{m} d(u) + g\mathbf{m} K \text{sgn}(s) \right] s_\phi \end{aligned}$$

Portanto, considerando a Observação 1, as hipóteses 2, 3, 5 e 6, e sendo  $K$  definido conforme (18), verifica-se facilmente que:

$$\dot{V}(t) \leq -\eta|s_\phi| \quad (21)$$

o que implica em  $V(t) \leq V(0)$ , e portanto, que  $s_\phi$  é limitado. Pela definição de  $s_\phi$ , equação (20), pode-se concluir que  $s$  também é limitado. Deste modo, pela Hipótese 7 e pelas equações (5) e (6), temos que  $\dot{s}$  é limitado.

Pode-se mostrar que a convergência a  $\Phi$  se dá em um intervalo de tempo finito, integrando ambos os lados da inequação (21) no intervalo  $0 \leq t \leq t_{\text{alc}}$ . Assim, sabendo que  $|s_\phi(t = t_{\text{alc}})| = 0$ , temos:

$$t_{\text{alc}} \leq \frac{|s_\phi(t = 0)|}{\eta} \quad (22)$$

o que prova que a camada limite é alcançada em um intervalo de tempo finito,  $0 \leq t \leq t_{\text{alc}}$  e completa a demonstração.  $\square$

Um conseqüência imediata do Teorema 2 é a confirmação da atratividade da camada limite, como pode ser mais formalmente enunciado através do seguinte corolário:

**Corolário 1** *Seja a camada limite definida conforme (16). Então, ao atender a condição (21), a lei de controle (17) faz da camada limite um conjunto invariante, ou seja, toda trajetória que se inicia no interior de  $\Phi$  permanece em  $\Phi$  para  $\forall t \geq 0$ .*

Em complementação ao Teorema 2, pode-se ainda concluir que dentro da camada limite temos  $s(\mathbf{x}, t) \leq \phi$  e deste modo, conforme apresentado em [5], os estados ficarão confinados a uma dada região  $S_\phi$ , definida por:

$$S_\phi = \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(t) \mid |\tilde{x}^{(i)}| \leq 2^{i-1} \lambda^{i-n} \phi, i = 1, \dots, n \right\} \quad (23)$$

## Simulação numérica

Vamos agora aplicar a metodologia desenvolvida ao seguinte sistema não-linear:

$$\ddot{x} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} - (\dot{x}^2 + 2x)\text{sen}\dot{x} - \frac{1}{20}x \text{sen}3t + gw(t)$$

onde variável de entrada  $w(t)$  representa a saída de uma não-linearidade do tipo zona-morta.

As simulações foram realizadas através de uma implementação em C, e com uma taxa de amostragem de 200 Hz. Os parâmetros escolhidos para o modelo de zona-morta foram  $m = 1$ ;  $\delta_l = -2$  e  $\delta_r = 2, 5$ . Para o controlador foi adotado  $\eta = 0, 1$ ;  $\delta = 3$ ;  $\phi = 0, 1$ ;  $\lambda = 0, 8$ ;  $\gamma = 50$ ;  $(gm)_{\min} = 0, 8$  e  $(gm)_{\max} = 1, 25$ . O vetor de parâmetros ajustáveis foi inicializado como  $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ , e os valores centrais das funções de pertinência triangulares e trapezoidais (extremidades), escolhidas para as simulações, foram  $C = \{-3; -0, 5; -0, 2; 0; 0, 2; 0, 5; 3\}$ .

Para demonstrar a robustez do algoritmo proposto, o termo  $1/20 x \text{sen}3t$  não foi incorporado à estrutura do controlador.

Pode-se avaliar o desempenho do controlador proposto, aqui denominado AFSMC (*Adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller*), através da comparação dos resultados obtidos com o AFSMC e com um controlador convencional por modos deslizantes (SMC), no problema de rastreamento da trajetória  $x_d(t) = 2, 5 \text{sen} t$

Na Figura 2 apresenta-se o erro de rastreamento obtido com os dois controladores. Pode-se verificar claramente a performance superior do algoritmo apresentado neste trabalho.

## Considerações finais

Foi apresentada uma estratégia de controle, baseada na lógica nebulosa e no controle por modos deslizantes, para sistemas dinâmicos incertos com zona-morta. A estabilidade do sistema em malha-fechada foi demonstrada com o auxílio do lema de Barbalat. Resultados obtidos em simulações numéricas

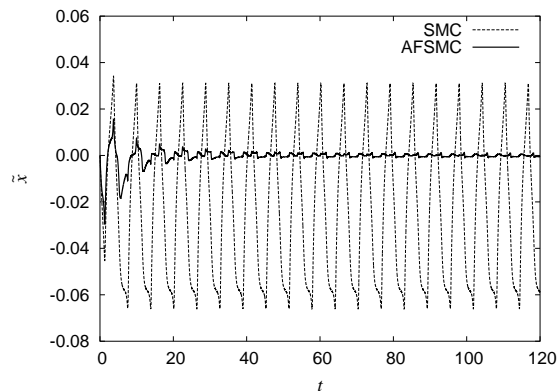


Figura 2: Erro de rastreamento.

comprovam o desempenho superior do sistema de controle proposto.

## Referências

- [1] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
- [2] J.-H. Kim, J.-H. Park, S.-W. Lee, and E. K. P. Chong. A two-layered fuzzy logic controller for systems with deadzones. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 41(2):155–162, 1994.
- [3] F. L. Lewis, W. K. Tim, L.-Z. Wang, and Z. X. Li. Deadzone compensation in motion control systems using adaptive fuzzy logic control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(6):731–742, 1999.
- [4] J. Sheng and J. Q. Sun. Sliding control accounting for hardware limitation of mechanical actuators with deadzone. *Journal of Sound and Vibration*, 266:905–911, 2003.
- [5] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [6] G. Tao and P. V. Kokotović. Adaptive control of plants with unknow dead-zones. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1):59–68, 1994.
- [7] C.-H. Tsai and H.-T. Chuang. Deadzone compensation based on constrained RBF neural network. *Journal of The Franklin Institute*, 341:361–374, 2004.
- [8] R. R. Šelmić and F. L. Lewis. Deadzone compensation in motion control systems using neural networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):602–613, 2000.
- [9] X.-S. Wang, C.-Y. Su, and H. Hong. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknow dead-zone. *Automatica*, 40:407–413, 2004.