

# Simulação de Escoamento em Meios Porosos com Domínios Alongados

**José Anderson do N. Batista**

Depto de Hidráulica e Saneamento da EESC/USP  
Av. Trabalhador São-carlense, 400 – CEP13566-590, São Carlos, SP  
joseandersonbatista@gmail.com

**Harry E. Schulz**

heschuz@sc.usp.br

**Edson Wendland**

ew@sc.usp.br

## 1 Introdução

Aquíferos Alongados geralmente ocorrem em regiões de depósito aluvionares e costeiros ou em zonas de afloramento de aquíferos confinados. Na prática, os estudos hidrogeológicos em aquíferos livres geralmente assumem contornos fechados baseados na hipótese de que a superfície potenciométrica reproduz a superfície topográfica, definindo bacias. Diversos estudos teóricos, no entanto, raramente confirmam essa hipótese ([5] e [11]). Resultados obtidos do estudo de [12] demonstram que a imposição de contornos artificiais em áreas menores que aquela em que ocorre o processo hidrológico tornam a abordagem insensível aos efeitos exteriores. O autor ainda acrescenta que em se tratando da imposição de divisores de água são introduzidos fortes efeitos de borda e a análise torna-se prejudicada.

O Método de Elementos Analíticos tem se desenvolvido para aplicações em domínio aberto (infinito) eliminando-se a necessidade de uso de contornos artificiais. Além disso, uma das principais características do método é a relação direta entre a função dos elementos analíticos e os efeitos físicos produzidos em cada estrutura representada no aquífero. Neste trabalho, obtêm-se elementos para aquíferos configurados entre dois contornos paralelos infinitos, portanto, chamado de Aquífero Alongado. A representação de efeitos nesses aquíferos pode ser conseguida diferentemente de acordo com a escala de trabalho. Se a abordagem é regional, por exemplo o escoamento gerado por uma taxa de recarga uniforme, a representação pode ser unidimensional e, portanto, diretamente aplicada ao domínio do aquífero. Se, porém, a abordagem é local, os elementos devem ser aplicados em um domínio mais simples que mapeia o domínio físico mediante a transformação de Schwarz-Christoffel. A única abordagem deste trabalho feita em escala regional é a solução clássica do escoamento unidimensional gerado por uma taxa de recarga uniforme entre duas fronteiras [3]. A

análise local utiliza-se de funções obtidas no plano de mapeamento (elementos). Os elementos construídos aqui consideram propriedades hidráulicas constantes no interior de porções definidas e apenas uma única camada aquífera, livre ou confinada.

## 2 O Problema Físico

São considerados aquíferos alongados aqueles aquíferos localizados entre duas fronteiras que se estendem por um comprimento muito maior que a distância entre eles. O escoamento através desses aquíferos sofre a influência tanto de efeitos regionais como locais. Considerando-se o aquífero apresentado na Figura 1 (região em cinza mais claro) suas fronteiras são o limite com um grande corpo d'água (região em cinza mais escuro) e o limite com a região de afloramento do embasamento (região branca). Todo o escoamento no aquífero é originado seja pela infiltração de chuvas seja pela liberação de água através da base. O escoamento de escala regional é aquele que deixa o domínio através de fronteiras regionais, portanto, na Figura 1 é aquele que se dirige à região em tom de cinza mais escuro. O escoamento local, por sua vez, é aquele que deixa o aquífero através de fronteiras internas, como poços, riachos e lagos.

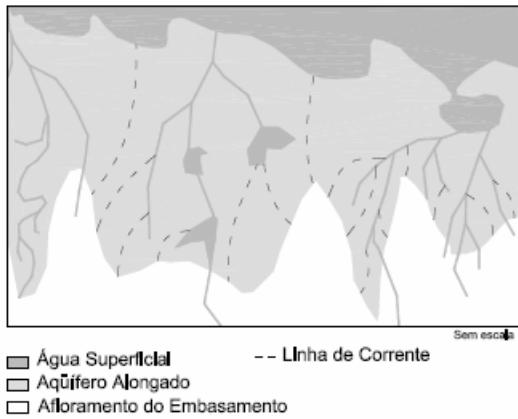


Figura 1 - Plano horizontal ilustrativo do escoamento regional e local de um aquífero alongado. Linhas de corrente regionais alcançam o grande corpo d'água. As linhas de corrente locais deixam o aquífero através de contornos internos.

As equações físicas dominantes sobre o processo de transporte do escoamento levam em conta a existência de um potencial complexo ( $\Phi$ ), definido como aquele cuja derivada produz um vetor de descarga específica ( $\mathbf{q}$ ). Considerando-se derivadas parciais em relação a um plano horizontal de coordenadas  $x$  e  $y$  representa-se o vetor de descarga específica por:

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j} \quad \text{Eq. 1}$$

onde  $\mathbf{Q}$ , é o vetor de descarga específica integralizada na direção vertical. De acordo com a lei de Darcy generalizada, o potencial de descarga deve incorporar,  $K$ , a condutividade hidráulica [ $LT^{-1}$ ],  $H$ , a espessura do escoamento [ $L$ ] e  $\phi$ , a carga hidráulica, ou energia específica do escoamento [ $L$ ]. Considerando-se o escoamento com recarga, tem-se a Equação de Poisson expressa pela Eq. 2. Escoamentos sem recarga, recaem na Equação de Laplace.

$$\nabla^2\Phi = -N \quad \text{Eq. 2}$$

### 3 Solução dos efeitos regionais do escoamento

Em aquíferos alongados, o escoamento regional segue preferencialmente a direção transversal do domínio. Isso torna possível a abordagem do problema em uma dimensão apenas. Na Figura 2 exibe-se a representação

esquemática de um aquífero alongado entre duas fronteiras paralelas retilíneas. Uma das fronteiras possui potencial constante e a outra, uma parede impermeável. Considere-se, ainda, que o sistema de eixos de coordenadas esteja localizado sobre a fronteira permeável e com a mesma direção. A primeira fronteira encontra-se à coordenada  $y=0$  e, a segunda, à coordenada  $y=L$ .

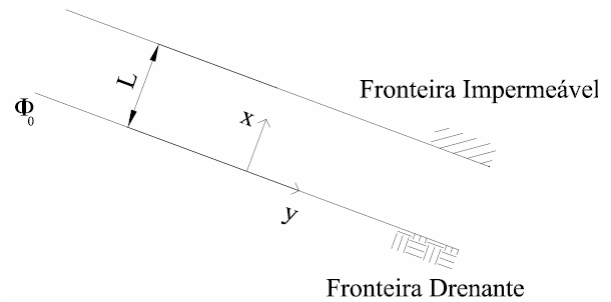


Figura 2 – Fronteiras Regionais de Aquíferos Alongados

A solução é obtida integrando-se a equação Eq. 2 e, em seguida, atribui-se o potencial à coordenada  $y=0$ . A segunda fronteira é representada atribuindo-se derivada nula à coordenada  $y=L$ . A solução é expressa pela seguinte equação ([3] e [9]):

$$\Phi_r = -\frac{N}{2}y^2 + NLy + \Phi_0 \quad \text{Eq. 3}$$

onde  $y$  fornece a distância relativa com respeito a um ponto de referência tomado sobre a fronteira drenante do aquífero. A taxa de recarga do escoamento [ $LT^{-1}$ ] é dada por  $N$ ;  $L$  é a distância entre as fronteiras.

### 4 Solução dos efeitos de escala local

O escoamento local é abordado em um semiplano obtido pela transformação de Schwarz-Christoffel. Cada ponto do domínio obtido corresponde a um outro do domínio físico. Assim, os elementos obtidos correspondem indiretamente às feições encontradas no aquífero. São considerados apenas problemas de escoamento estacionário em uma única camada aquífera.

#### 4.1 A transformação de Schwarz-Christoffel para Aquíferos Alongados

A técnica de mapeamento conforme permite obter funções entre um certo domínio e outro mais simples, por exemplo, um semiplano. A transformação de Schwarz-Christoffel expressa a função que remete um semiplano  $\zeta$  em um polígono qualquer no plano  $z$ . Assim, as fronteiras dos aquíferos são descritas por meio de segmentos de reta. Admite-se que a representação de aquíferos por um polígono não introduza perda de detalhes à medida que a área de interesse do problema esteja distante dos contornos.

A transformação de um domínio entre duas retas paralelas onde são impostas as mesmas condições de contorno é fornecida por [9]. Considera-se a distância entre os contornos igual a  $d$ , a faixa ( $z$ ) será mapeada em um semiplano superior ( $\zeta$ ) por intermédio da seguinte função:

$$z = \frac{d}{\pi} \log \zeta \quad \text{Eq. 4}$$

Se, por outro lado, cada linha da faixa tem diferentes condições de contorno, o mapeamento só é possível em um semiplano de dois eixos. Assim, o mapeamento da faixa recai sobre o primeiro quadrante de  $\zeta$ , o semiplano  $\tau$ . Note-se que a raiz quadrada de  $\zeta$  expressa matematicamente o primeiro quadrante do semiplano. Substituindo-se  $\tau = \sqrt{\zeta}$  na Eq. 4 tem-se:

$$z = \frac{2d}{\pi} \log \tau \quad \text{Eq. 5}$$

Muito embora a função logarítmica produza uma sobreposição de superfícies em  $z$ , a unicidade da transformação é assegurada em que o domínio físico possui uma largura finita ( $d$ ). Dessa forma, o semiplano  $\zeta$  possui seus argumentos limitados pelos eixos ( $0 \leq \arg \zeta \leq \pi$  ou  $0 \leq \arg \tau \leq \frac{\pi}{2}$ ), produzindo um único trecho da superfície correspondente à faixa de  $z$ .

#### 4.2 Solução para Poços

O potencial complexo para a representação de um poço de penetração total localizado à coordenada  $\tau$  com uma descarga  $Q_w$  [LT<sup>3</sup>] é o conhecido potencial logarítmico. Sendo o poço uma estrutura pontual no meio, o mapa de seu escoamento no semiplano é obtido simplesmente efetuando-se a transformação de coordenadas. De acordo com a transformação de Schwarz-Christoffel (Eq. 5) o mapa do escoamento é:

$$\Omega_w = -\frac{Q_w}{2\pi} \log(e^{\frac{\pi z}{2d}} - e^{\frac{\pi z_w}{2d}}) + \Omega_{0_w} \quad \text{Eq. 6}$$

onde  $z_w$  é a coordenada do poço no aquífero.

#### 4.3 Solução de Linha

A solução de escoamentos gerados por linhas é expressa pela integral de linha de Cauchy como:

$$\Omega_{le} = -\left(\frac{1}{i}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\Delta)}{Z - \Delta} d\Delta \quad \text{Eq. 7}$$

onde o termo  $\left(\frac{1}{i}\right)$  faz alusão ao uso de dipolos transversais (na ausência do termo, são utilizados dipolos longitudinais); o parâmetro  $\mu$  é a função de distribuição de esforços ao longo da linha;  $\Delta$  é a variável de integração definida sobre a linha; e  $Z$  é a coordenada complexa que define posições em relação à linha que produz o escoamento. A variável  $Z$  é expressa pela relação a seguir:

$$Z = \frac{\zeta - \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)}{\frac{1}{2}(\zeta_2 - \zeta_1)} \quad \text{Eq. 8}$$

As coordenadas  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são definidas para os extremos da linha geradora e a coordenada  $\zeta$  é uma coordenada qualquer do plano de mapeamento. A partir da transformação de Schwarz-Christoffel (Eq. 4 ou Eq. 5) pode-se encontrar um novo plano *Zeta* que mapeia  $Z$ :

---


$$Z = \frac{\exp(\frac{1}{2}(1 - Zeta)\ln z_1) \exp(\frac{1}{2}(1 + Zeta)\ln z_2) - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} \quad \text{Eq. 9}$$


---

De acordo com [9]: 1) a distribuição de esforços ( $\mu$ ) deve ser real sobre o intervalo; e 2) a solução de Eq. 7 deve apresentar sobre o intervalo uma descontinuidade igual à distribuição ( $\mu$ ).

Escrevendo-se  $\mu$  em termos da parte real de *Zeta* ( $\Re Zeta = \Xi$ ), assegura-se que  $\mu$  terá apenas valores reais sobre o intervalo. Logo, a variável de integração  $\Delta$  é substituída por  $\Xi$  da seguinte maneira:

$$\Omega_{le} = -\left(\frac{1}{i}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu(\Xi)}{Z - \Delta(\Xi)} \frac{d\Delta}{d\Xi} d\Xi \quad \text{Eq. 10}$$

A segunda condição é satisfeita separando-se integral em duas partes (Eq. 11). A primeira parte produz uma integral singular bem conhecida que é

$$\Omega_{le} = -\left(\frac{1}{i}\right) \frac{\mu(Zeta)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{Z - \Delta} d\Delta + \left(\frac{1}{i}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu(Zeta) - \mu(\Xi)}{Z - \Delta(\Xi)} \frac{d\Delta}{d\Xi} d\Xi \quad \text{Eq. 11}$$

Resolvendo-se a Eq. 11, tem-se:

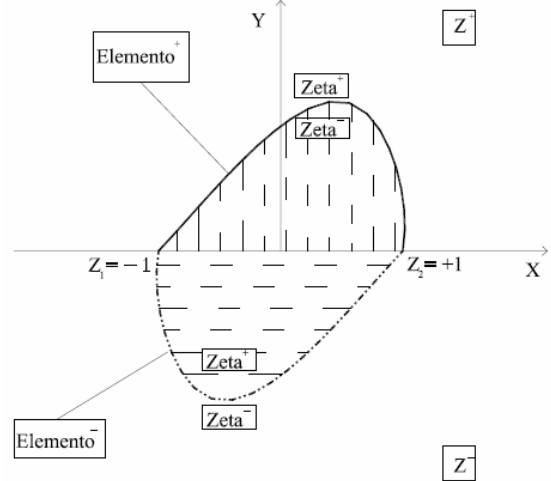
$$\Omega_{le} = \left(\frac{1}{i}\right) \frac{\mu(Zeta)}{2\pi} \log \frac{Z-1}{Z+1} + I_2 + \Omega_{0_{le}} \quad \text{Eq. 12}$$

onde  $\Omega_{0_{le}}$  é um potencial de referencia; e  $I_2$  denota a solução numérica da integral singular fraca.

A função logarítmica apresenta um salto abrupto, chamado de ramo, ao longo de todo o eixo real ( $\Im Z=0$ ). O segundo termo da integral não exibe saltos. Assim, a segunda condição é satisfeita corrigindo-se o comportamento do ramo do logaritmo para a linha de integração (Figura 3).

Na Figura 3 apresenta-se uma linha de integração localizada acima do eixo  $\Im Z=0$  e outra abaixo. O ramo do termo logaritmo terá sido deslocado para a linha de integração com valor igual a  $\mu(\Xi)$  se for encontrada uma diferença igual a  $2\pi i$  entre os argumentos do logaritmando acima e abaixo da linha de integração ( $\Im Zeta=0$ ). Por outro lado, o ramo deve deixar de aparecer no eixo  $\Im Z=0$ . Assim, pode-se observar que a transferência do ramo do eixo  $\Im Z=0$  para o eixo  $\Im Zeta=0$  é efetuada somando-se o ângulo  $2\pi$  onde  $\Im Z < 0 \cap \Im Zeta > 0$  e  $-2\pi$  onde  $\Im Z > 0 \cap \Im Zeta < 0$ , eliminando-se, de igual modo a presença do salto em  $\Im Z=0$ .

logo satisfeita por uma função logarítmica. A segunda parte, no entanto, representa, ainda, uma integral singular fraca. Essa integral pode ser resolvida satisfatoriamente por meio de aproximações conhecidas como quadraturas gaussianas.



**Figura 3 – Regiões de Z onde é necessário efetuar correções no ramo da função logarítmica.**

## 5 Condições de Contorno do Mapa

Uma maneira simples de se impor condições de contorno ao escoamento no mapa é aplicar o método de imagens. O método consiste de reproduzir o escoamento no lado oposto do contorno de acordo com as condições desejadas. Dessa forma, cada solução obtida particularmente para os elementos usados no modelo é espelhada em relação à localização da singularidade e a seus esforços.

O referencial teórico do método é encontrado em [6]. Recentemente, soluções de escoamentos sujeitos a vizinhanças semi-impermeáveis [1] e de campos tridimensionais devidos a poços de penetração parcial [4] tem sido obtidas com a aplicação do método. O acoplamento de soluções de linha diretamente a domínios semi-infinitos foi obtido em [2]. Entretanto, o uso direto de imagens sobre domínios alongados provoca erros de truncamento devido à inviabilidade computacional de atender ao grande número de imagens necessárias. De acordo com a teoria de [6], o número de imagens necessárias para semiplanos quadrantes é de apenas três. Portanto,

considerado viável do ponto de vista computacional.

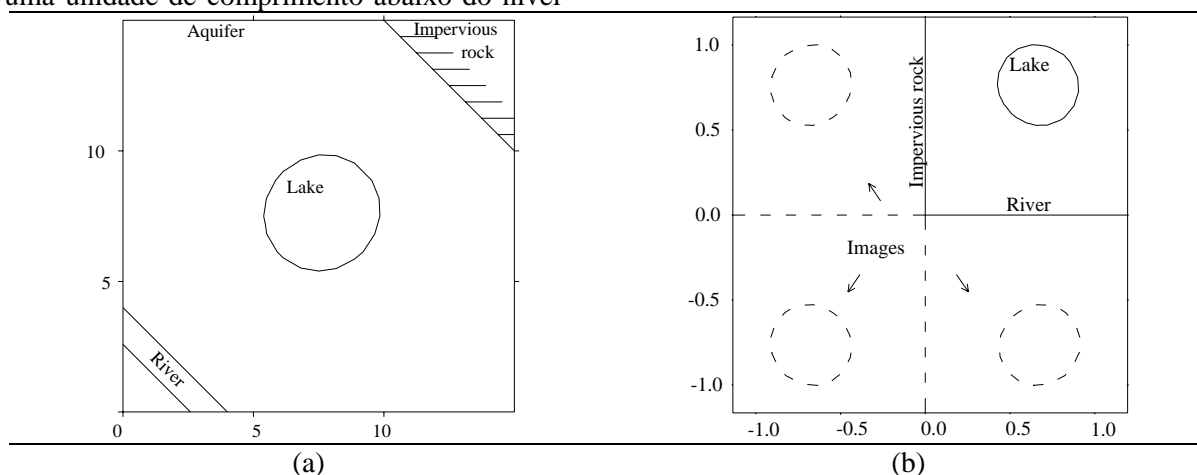
## 6 Verificação

Considere uma região de depósito sedimentar contornada por um rio retilíneo infinito e uma parede de rocha impermeável paralela ao mesmo. Considere, ainda que a evaporação de um lago elíptico é a única responsável pela produção de escoamento no domínio.

O conjunto de dados do aquífero possui unidades arbitrárias de comprimento [L] e de tempo [T]. A condutividade hidráulica é unitária ( $K=1.0L/T$ ) e a elevação do fundo do aquífero é de uma unidade de comprimento abaixo do nível

do rio ( $b=-1.0L$ ). O rio tem carga hidráulica constante  $\phi=0.0L$  logo, o potencial de descarga, é nulo ( $\Phi=0.0 L^3/T$ ). A taxa de evaporação do lago é encontrada em  $0.001L^3/T$ .

A solução exata é obtida efetuando-se o mapeamento do escoamento gerado por um poço. Esse escoamento produz linhas equipotenciais elípticas. Assim, é localizado um poço na largura média do aquífero (coordenadas  $x, y$  iguais a 7,25 e 7,25) a fim de gerar uma equipotencial a ser utilizada na representação da borda do lago (Figura 4a). O mapa do domínio físico e o espelhamento dos elementos encontram-se ilustrados na Figura 4b.



**Figura 4 – Mapeamento de Schwarz-Christoffel para o exemplo de verificação: a) domínio físico; b) quadrante de mapeamento com o espelhamento dos elementos**

A solução de Elementos Analíticos (AEM) é apresentada em contraste com a solução exata na **Figura 5**. A solução AEM é obtida do cálculo dos parâmetros das distribuições de esforços em pontos de controle localizados sobre cada elemento. Neste exemplo, foram utilizados 39 elementos com distribuição de esforços polinomial de segunda ordem gerando 119 incógnitas. Sobre cada segmento, foram posicionados primeiramente 10 pontos de controle, superdeterminando, portanto, o sistema de equações. Dessa forma, foram resolvidas 470

equações pelo método dos mínimos quadrados. Observa-se que a presença de erros residuais gera uma oscilação nas equipotenciais próximas aos elementos (**Figura 5a**). Entretanto, o posicionamento de um maior número de pontos de controle e portanto um maior grau de superdeterminação (50 pontos de controle gerando 2030 equações) aumenta a qualidade da aproximação (**Figura 5b**). Assim, a aproximação coincide com a solução exata em todo domínio, exceto em pontos próximos aos elementos.

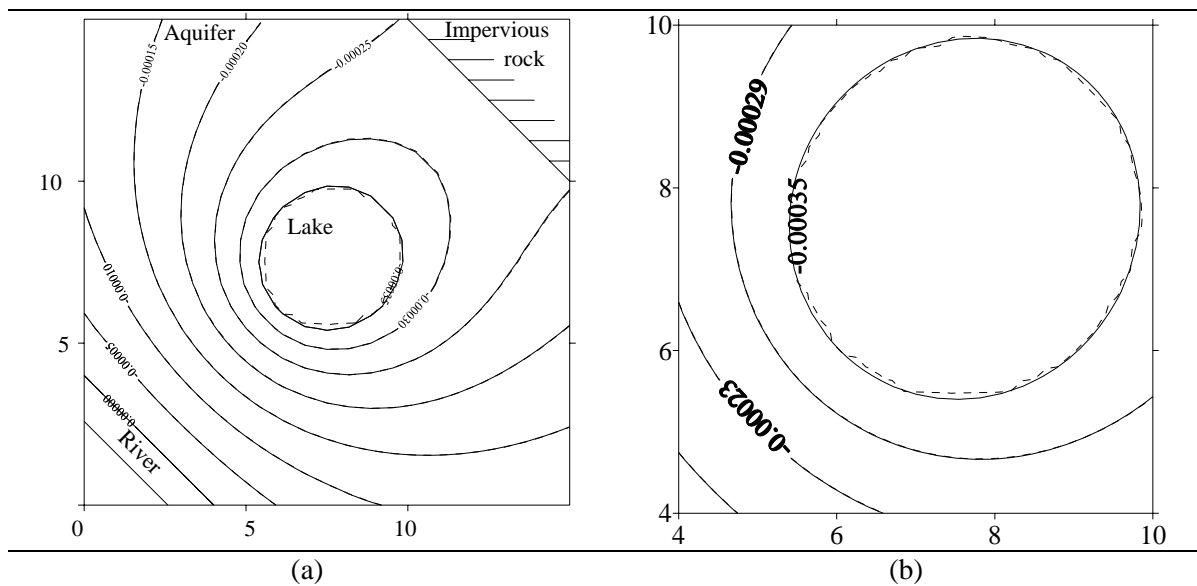


Figura 5 – Comparação entre a solução exata (linhas cheias) e AEM (linhas tracejadas): a solução AEM é apresentada em função do posicionamento de a) 10 pontos de controle e de b) 50 pontos de controle.

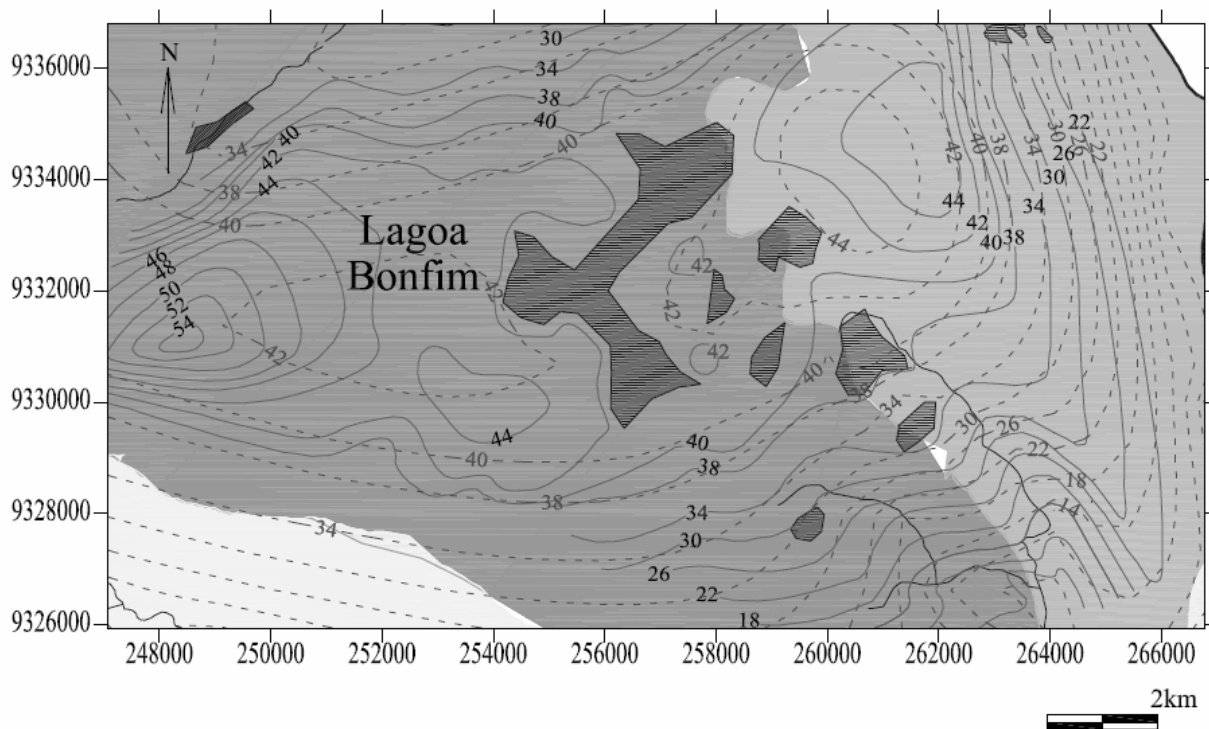


Figura 6 – Mapa de isolinhas de carga hidráulica do sistema de escoamento da lagoa Bonfim. Linhas mais espessas representam cursos de água; linhas mais finas representam a superfície obtida em campo; linhas tracejadas representam o resultado da simulação; regiões coloridas em tons de cinza são lagoas, e poros de diferentes condutividades.

## 7 Aplicação

O escoamento em um aquífero alongado é estudado no Estado do Rio Grande do Norte,

nordeste Brasileiro. O aquífero consiste de duas grandes formações isotrópicas e homogêneas. A maior parte do meio possui uma condutividade hidráulica de 10m/d e as demais regiões possuem 4,1m/d [7]. O aquífero é livre e, portanto, recebe recarga direta proveniente de chuvas. A base

impermeável do aquífero encontra-se em média 20m abaixo do nível do mar. As cargas hidráulicas utilizadas na calibração foram obtidas do estudo [8] em uma época anterior ao estágio atual de desenvolvimento. Portanto, os estímulos externos recebidos pelo sistema são a recarga, considerada constante e uniforme, e o balanço hídrico das lagoas apresentadas. A precipitação menos a evaporação das lagoas fornece uma retirada de 0,7mm/d.

O modelo compreende 576 elementos totalizando 1994 incógnitas. São aplicados elementos com comprimentos menores próximos à lagoa Bonfim aumentando o comprimento com o distanciamento da área de interesse. Os pontos de controle são posicionados em número de 3, 6 ou 10 por elementos gerando 2823 equações.

As cargas foram calibradas de maneira satisfatória à taxa de recarga de 0,8mm/d. Esse valor é em média 30% superior ao encontrado por outros autores em estudos de campo [7] e [8]. Entretanto, considera-se o resultado satisfatório em razão da grande variabilidade temporal do fenômeno. O mapa de isolinhas simuladas pode ser contrastado com o mapa de isolinhas medidas em campo na Figura 6. Muito embora a simulação não atinja a superfície medida, as cargas simuladas obedecem ao padrão de direções de fluxo. Na porção leste, obtém-se o melhor ajuste. Nas porções norte e sul, as isolinhas simuladas seguem as medidas próximas. À oeste, observa-se uma elevação brusca das cargas, provavelmente devido à ocorrência de caminhos preferenciais de recarga, não inferidos ao modelo. As discrepâncias podem ser atribuídas à simplificação do escoamento como estacionário.

## 8 Conclusões

O escoamento em meios porosos foi modelado em domínio semi-infinito. A transformação de Schwarz-Christoffel foi utilizada para mapear estruturas do domínio físico por elementos no domínio mapa. A transformação ainda viabiliza o uso do método de imagens sem a necessidade de truncamentos.

A formulação elaborada neste trabalho foi utilizada para descrever uma solução exata. De acordo com os resultados, a solução de elementos analíticos tende a melhorar com o número de pontos de controle por elemento. Outra possibilidade de melhoria pode ser encontrada reduzindo-se os erros de aproximação da solução do sistema de equações com algoritmos mais eficientes ou com um melhor condicionamento do sistema. A metodologia foi aplicada de maneira

satisfatória a um problema prático produzindo uma calibração da taxa de recarga do escoamento igual a 0,8mm/mês. Esse resultado é próximo a valores obtidos em trabalhos anteriores.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação para o Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP processo 06/57242-2) e ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq processo 141354/2001-1) pelo suporte financeiro.

## Referências

- [1] Bakker M. e Anderson E. I. Steady Flow to a Well Near a Stream with a Leaky Bed. *Ground Water*;41(6): 833-840(2004)
- [2] Batista, J.A.N., Wendland, E. e Schulz, H.E.. Acoplamento de Expressão Unidimensional de Recarga a Modelos de Elementos Analíticos. *Tendências em Matemática Aplicada*. v. 6, n. 1, p. 43-53. (2005)
- [3] Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier Science. Nova York. (1972)
- [4] Haitjema H. M. Modeling three-dimensional flow in confined aquifers by superposition of both two- and three-dimensional analytic functions. *Water Resour. Res*;21(10):1557-1566(1985)
- [5] Haitjema H.M. e Mitchell-Bruker S. Are water tables a subdue replica of the topography? *Ground Water*;43(6):781-786(2005)
- [6] Keller J.B. The scope of the Image Method. *Comm. on Phys. and App. Math*. 1953;4:505-512
- [7] Melo J. G. e Feitosa E. C. Pesquisa hidrogeológica do complexo lagunar do Bonfim. Relatório técnico à Secretaria de Recursos Hídricos do Estado do Rio Grande do Norte (SERHID). Natal, Brasil (1998)
- [8] Pereira R. Caracterização hidrológica do sistema lacustre Bonfim. Tese de Doutorado. Federal Universidade do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro (2001)
- [9] Strack O. D. L. *Groundwater mechanics*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. (1989)
- [10] Stroud A.H. e Secrest D. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. (1966)
- [11] Winter T. C, Rosenberry D. O. e LaBaugh J. W. Where does ground water in small watersheds come from? *Ground Water*;41(7):1989-1000(2003)
- [12] Woo M. Boundary and border considerations in hydrology. *Hidrol. Pross*;18:1185-1195(2004)